

Chapitre 7 : Fonction logarithme décimal.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Contenus :

- Définition du logarithme décimal de b pour $b > 0$ comme l'unique solution de l'équation $10^x = b$; notation $\log$.
- Sens de variation.
- Propriétés algébriques : $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, $\log(a^n) = n\log(a)$ et $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$, pour n entier naturel, a et b deux réels strictement positifs.

Capacités attendues :

- Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ d'inconnue x réelle, une inéquation du type $a^x < b$ ou $x^a < b$ d'inconnue x réelle ou du type $a^n < b$ d'inconnue n entier naturel.
- Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal pour transformer des expressions numériques ou littérales.

Commentaires :

- La formule du logarithme d'un produit, qui peut être démontrée ou admise, permet de prouver les propriétés suivantes : $\log(\frac{1}{b}) = -\log(b)$, $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$ et, pour de petites valeurs de n , $\log(a^n) = n\log(a)$.
- La recherche d'un nombre d'annuités comme celle d'un taux moyen fournissent des exemples de résolution d'équations de la forme $a^x = b$ ou $x^a = b$.
- La valeur du logarithme décimal d'un nombre strictement positif permet d'obtenir son ordre de grandeur et de déterminer, dans le cas d'un entier strictement positif, le nombre de chiffres de son écriture décimale.
- La travail sur le logarithme décimal peut être l'occasion de représenter une série statistique ou une fonction dans un repère logarithmique ou semi-logarithmique.

Sources :

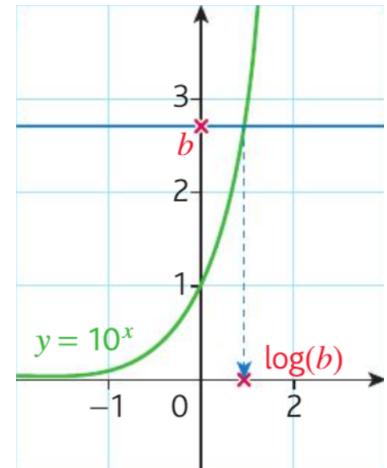
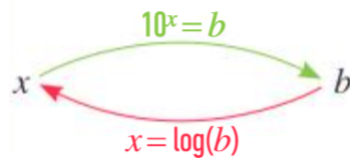
- Manuel indice Tle techno
- Calao mathématique Tle techno
- Tle techno sigma

Activité 1 (geogebra).

I Définition et sens de variation.

I.1 Définition.

Définition 1 : Soit b un nombre réel strictement positif. L'unique solution de l'équation $10^x = b$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, s'appelle **le logarithme décimal de b** , et se note $\log(b)$. On a alors $x = \log(b)$.



Exemple : $10^0 = 1$ donc $\log(1) = 0$

$10^1 = 10$ donc $\log(10) = 1$

Propriétés 2 :

1. Pour tout réel $b > 0$ et tout réel x , $\log(b) = x \iff b = 10^x$.
2. Pour tout réel $b > 0$, $10^{\log(b)} = b$.
3. Pour tout nombre réel b , $\log(10^b) = b$.

Exemple : $\log(x) = 8 \iff x = 10^8$

$\log(x) = 0,58 \iff x = 10^{0,58}$

Objectif : Calculer le logarithme décimal d'un nombre.

Communs : Exercices 32, 33, 34, 36 page 56.

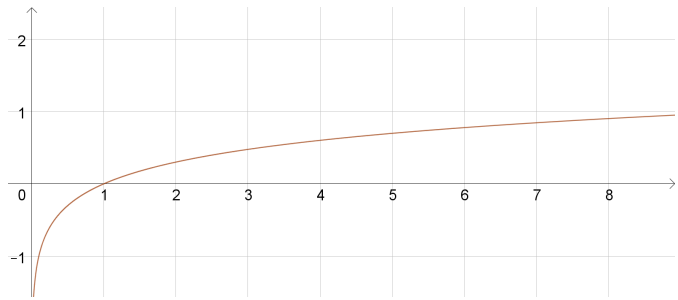
Pour les plus rapides : Exercice 35 page 56.

I.2 Sens de variation de la fonction logarithme décimal.

Définition 3 : La fonction **logarithme décimal**, notée $\log$, est la fonction qui, à tout réel b strictement positif, associe $\log(b)$.

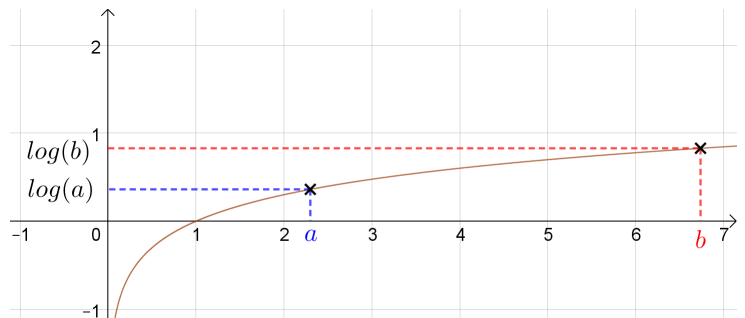
Propriétés 4 :

1. La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
2. La fonction logarithme décimal est strictement négative sur $]0; 1[$.
3. La fonction logarithme décimal est strictement positive sur $]1; +\infty[$.



Propriétés 5 : Pour tous réels a et b strictement positifs :

1. $\log(a) = \log(b) \iff a = b$
2. $\log(a) < \log(b) \iff a < b$



Exemple : Soit x un réel strictement positif : $\log(x) < \log(7,8) \iff x < 7,8$.

Propriété 6 : Pour tout réel b strictement positif et tout réel a , $\log(b) < a \iff b < 10^a$.

Exemple : Soit x un réel strictement positif : $\log(x) < 6 \iff x < 10^6$.

Objectif : Utiliser les propriétés de la fonction logarithme décimal.

Communs : Exercices 37, 38, 40 page 56.

Pour les plus rapides : Exercice 39 page 56.

Activité 2 : conjecturer les propriétés du log.

II Propriétés algébriques.

Propriétés 7 : Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier naturel n :

$$1. \log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

$$3. \log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$$

$$2. \log(a^n) = n\log(a)$$

$$4. \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

Exemple : $\log(6) = \log(2 \times 3) = \log(2) + \log(3)$

$$\log(8) = \log(2^3) = 3\log(2)$$

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log(2)$$

Propriété 8 : Pour tout réel a strictement positif et tout réel x , $\log(a^x) = x\log(a)$.

Exemple : $\log(5^{1,5}) = 1,5\log(5)$.

Objectif : Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal pour transformer des expressions numériques ou littérales.

Communs : Exercices 43 page 56, 94, 95, 96, 99, 91, 92 page 59, 103 page 60.

Pour les plus rapides : Exercices 44, 45, 46 page 56, 97, 93, 98 page 59, 100 page 59, 104, 105 page 60.

III Résoudre des équations et inéquations à l'aide du logarithme décimal.

III.1 Résolution d'équation.

Propriété 9 : Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a \neq 1$. L'unique solution de l'équation $a^x = b$ est $x = \frac{\log(b)}{\log(a)}$.

Exemple :

$$\begin{aligned} 4^x = 7 &\iff \log(4^x) = \log(7) \\ &\iff x \times \log(4) = \log(7) \\ &\iff x = \frac{\log(7)}{\log(4)} \end{aligned}$$

Propriété 10 : Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$ et $b > 0$. L'unique solution de l'équation $x^a = b$ est $x = 10^{\frac{\log(b)}{a}}$.

Exemple :

$$\begin{aligned} x^{1,6} = 9 &\iff \log(x^{1,6}) = \log(9) \\ &\iff 1,6 \times \log(x) = \log(9) \\ &\iff \log(x) = \frac{\log(9)}{1,6} \\ &\iff 10^{\log(x)} = 10^{\frac{\log(9)}{1,6}} \\ &\iff x = 10^{\frac{\log(9)}{1,6}} \end{aligned}$$

Objectif : Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une équation.

Communs : Exercices 49 page 56, 53, 55 page 57, 111 page 60, 113 page 60.

Pour les plus rapides : Exercices 54 page 57, 106, 107, 108, 109, 110 page 60, 114, 115 page 61.

Objectif : Utiliser le logarithme décimal pour résoudre un problème.

Communs : Exercices 59 page 57, 130, 131 page 62.

Pour les plus rapides : Exercices 132, 133, 134 page 62.

III.2 Résolution d'inéquations.

Propriété 11 : Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a \neq 1$. L'intervalle solution de l'inéquation $a^x < b$ est :

- $] -\infty; \frac{\log(b)}{\log(a)}[$ si $a > 1$,
- $]\frac{\log(b)}{\log(a)}; +\infty[$ si $a < 1$.

Exemple : Résolvons l'équation $0,3^x \leq 2$.

$$0,3^x \leq 2 \iff \log(0,3^x) \leq \log(2) \text{ d'après la propriété 5.}$$

$$\iff x \times \log(0,3) \leq \log(2) \text{ d'après la propriété 8.}$$

$$\iff x \geq \frac{\log(2)}{\log(0,3)} \text{ car } \log(0,3) < 0$$

Propriété 12 : Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$ et $b > 0$. L'intervalle solution de l'inéquation $x^a < b$ est :

$$-] -\infty; 10^{\frac{\log(b)}{a}}[\text{ si } a > 0,$$

$$-]10^{\frac{\log(b)}{a}}; +\infty[\text{ si } a < 0.$$

Résolvons l'équation $x^7 < 4,5$.

$$x^7 < 4,5 \iff \log(x^7) < \log(4,5)$$

$$\iff 7 \times \log(x) < \log(4,5)$$

$$\iff \log(x) < \frac{\log(4,5)}{7}$$

$$\iff 10^{\log(x)} < 10^{\frac{\log(4,5)}{7}}$$

$$\iff x < 10^{\frac{\log(4,5)}{7}}$$

Objectif : Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une inéquation.

Communs : Exercices 50 page 56, 51 page 57, 123, 124 page 61.

Pour les plus rapides : Exercices 52 page 57, 119, 120, 121, 122, 125, 126, 127, 128 page 61.

IV Applications du logarithme décimal.

IV.1 Ordre de grandeur d'un nombre strictement positif.

Pour donner un ordre de grandeur d'un nombre x strictement positif (dont on ne connaît pas l'écriture scientifique), on peut utiliser son logarithme décimal.

Exemple : Soit $x = 2,7^{14}$. On souhaite connaître un ordre de grandeur de x .

On calcule : $\log(x) = \log(2,7^{14}) = 14 \times \log(2,7) \approx 6,04$.

On en déduit un encadrement de x par deux puissances de 10 :

$$10^6 < 2,7^{14} < 10^7$$

Un ordre de grandeur de $2,7^{14}$ est 10^6 .

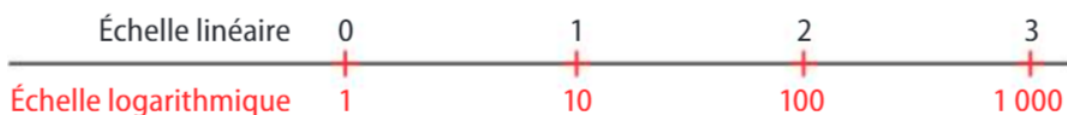
Objectif : Donner un ordre de grandeur d'un nombre strictement positif.

Communs : Exercices 41, 42 page 56, 135, 136 page 62.

Pour les plus rapides : Exercices 137 page 62, 60 page 57.

IV.2 Repère logarithmique, semi-logarithmique.

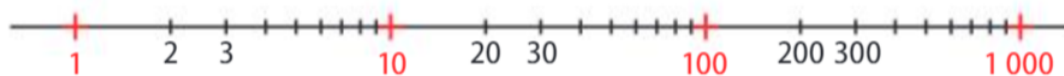
Définition 13 : Une **échelle logarithmique** est un système de graduation où les graduations principales sont les termes d'une suite géométrique de raison 10.



Le point associé à la graduation x ($x > 0$) est placé à une distance $\log(x)$ du point associé à la graduation 1.

Par exemple, pour placer le chiffre 2, on va calculer $\log(2) \approx 0,30$ et se placer à une distance approximative de 0,3 du chiffre 1.

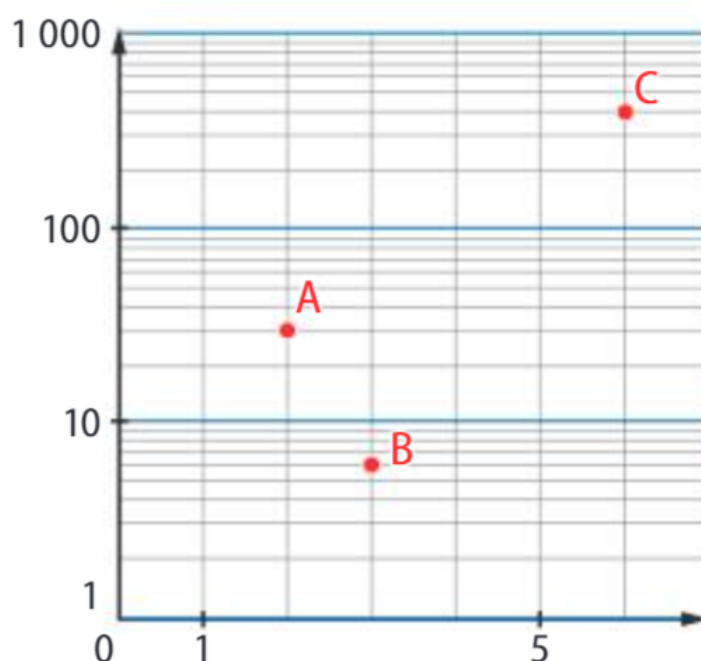
Pour placer le chiffre 3, on va calculer $\log(3) \approx 0,48$ et se placer à une distance approximative de 0,48 du chiffre 1.



Définition 14 : Un **repère logarithmique** est un repère du plan dans lequel les deux axes sont gradués selon une échelle logarithmique.

Un repère semi-logarithmique est un repère du plan dans lequel un seul des axes est gradué selon une échelle logarithmique.

Exemple : Dans le repère semi-logarithmique ci-dessous, on a placé les points A(2;30), B(3;6) et C(6;400).



Objectif : Représenter des points dans un repère logarithmique ou semi-logarithmique.

Communs : Exercices 62, 63 page 57, 142, 144 page 63.

Pour les plus rapides : Exercices 61, 64 page 57, 143 page 63.