

Chapitre 6 : Probabilités conditionnelles.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Contenus :

- Conditionnement par un évènement de probabilité non nulle.
- Indépendance de deux évènements de probabilités non nulles.
- Formule des probabilités totales pour une partition de l'univers.

Capacités attendues.

- Construire un arbre de probabilités associé à une situation aléatoire donnée.
- Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en terme de probabilités, et notamment de probabilités conditionnelles.
- Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant.
- Utiliser un arbre de probabilités pour calculer des probabilités.
- Calculer la probabilité d'un évènement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

Commentaires.

- L'indépendance de deux évènements repose sur la définition suivante : pour un évènement A de probabilité non nulle, B est indépendant de A si $P_A(B) = P(B)$. On démontre que la propriété d'indépendance est symétrique lorsque A et B sont de probabilités non nulles.
- La formule des probabilités totales est mise en relation avec l'arbre. Elle est démontrée dans le cas d'une partition de l'univers en deux ou trois évènements, la notion de partition étant présentée sans formalisme.

Sources :

- Mathématiques Tle Tronc commun, Delagrave.
- TechMaths Tle Voie Technologique Enseignement commun - 2020
- Manuel Indice
- Calao - Mathématiques - Terminales STMG / ST2S / STHR - 2020.

Activité 1 page 130.

Dans ce cours, on notera Ω l'univers.

I Probabilités conditionnelles

I.1 Définition.

Définition : Soient A et B deux évènements de l'univers Ω , avec A de probabilité non nulle ($P(A) \neq 0$). La probabilité que l'évènement B soit réalisé sachant que l'évènement A est réalisé, appelée probabilité conditionnelle de B sachant A, est le nombre noté $P_A(B)$, défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple : On considère les dix boules numérotées ci-contre.

On prend une boule au hasard et on s'intéresse aux évènements suivants :

- R : « La boule tirée est rouge ».
- N : « La boule tirée porte le numéro 1 ».



On considère que les boules sont indiscernables au toucher, et on cherche la probabilité que la boule tirée porte le numéro 1 sachant qu'elle est rouge, c'est-à-dire $P_R(N)$.

Pour cela, on peut représenter le tableau ci-contre.

Couleur \ Numéro	Numéro		
	n°1	n°2	Total
Rouge	2	2	4
Verte	4	2	6
Total	6	4	10

$P(R \cap N) = \frac{2}{10} = 0,2$ et $P(R) = \frac{4}{10} = 0,4$. Donc $P_R(N) = \frac{0,2}{0,4} = 0,5 = 50\%$.

Objectif : Maîtriser le vocabulaire des probabilités conditionnelles.

Communs : Exercices 15, 17, 19 page 139, 46, 51 page 142.

Pour les plus rapides : Exercices 13, 14, 16, 18 page 139.

Exercices page 142-143.

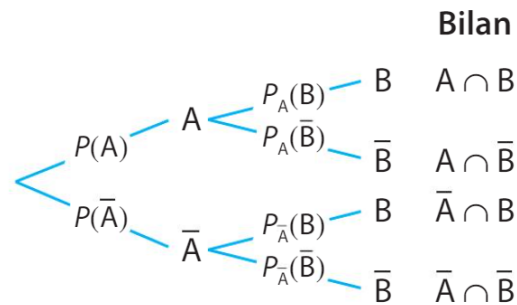
Objectif : Calculer des probabilités conditionnelles.

Communs : Exercices 22, page 139, 25 page 140.

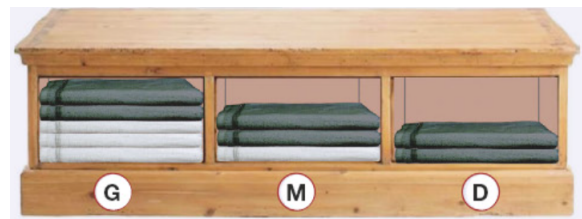
Pour les plus rapides : Exercices 13, 14, 16, 18 page 139.

I.2 Arbre de probabilité.

Soient A et B deux évènements de l'univers Ω , avec A de probabilité non nulle. On peut représenter une situation où il apparaît la probabilité de A sachant B par un arbre de probabilités pondéré.



Exemple : La commode représentée ci-contre possède trois tiroirs G, M et D, contenant chacun des serviettes foncées et blanches.

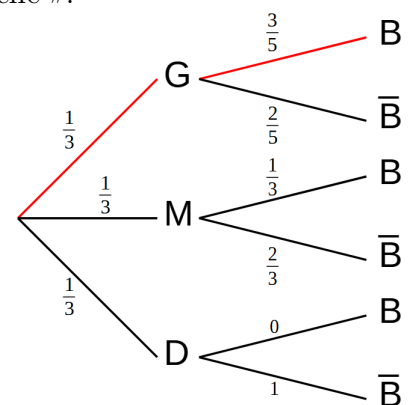


Un enfant ouvre un tiroir au hasard et y prend une serviette, toujours au hasard. On note :

- G l'évènement : « L'enfant a ouvert le tiroir de gauche », — D l'évènement : « L'enfant a ouvert le tiroir de droite »,
- M l'évènement : « L'enfant a ouvert le tiroir du milieu », — B l'évènement : « L'enfant a pris une serviette blanche ».

On peut représenter la situation par l'arbre pondéré ci-contre.

Le chemin rouge correspond au choix du tiroir gauche, puis d'une serviette blanche : $P_G(B) = \frac{3}{5}$ car il y a trois serviettes blanches parmi cinq dans le tiroir de gauche.



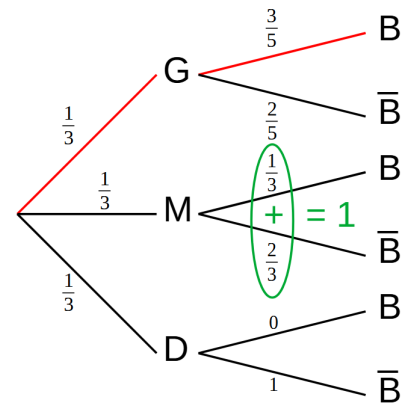
Propriétés :

- La somme des probabilités issues d'un même noeud est égale à 1.
- La probabilité d'un évènement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités portées par les branches de ce chemin.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. La probabilité de choisir une serviette blanche et qui vient du tiroir de gauche, notée $P(G \cap B)$ vaut :

$$P(G \cap B) = P(G) \times P_G(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

On observe également que la somme des probabilités issues d'un même noeud est égale à 1.



Méthode : Calculer des probabilités à l'aide d'un arbre.

- On complète les branches.
- On utilise les règles de calculs.
- Une probabilité conditionnelle qui ne se lit pas sur l'arbre se calcule avec la formule.

Objectif : Construire un arbre de probabilités associé à une situation aléatoire donnée.

Communs : Exercices 28, 59, 60 page 143.

Pour les plus rapides : Exercices 29, 32, 61, 62 page 144.

Objectif : Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en terme de probabilités, notamment de probabilités conditionnelles.

Communs : Exercices 26, 63, 64 page 144.

Pour les plus rapides : Exercice 27, 30 page 140.

Objectif : Utiliser un arbre pour calculer des probabilités.

Communs : Exercices 65, 67 page 144.

Pour les plus rapides : Exercice 68 page 145.

Objectif : Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant.

Communs : Exercices 33, 34 page 141.

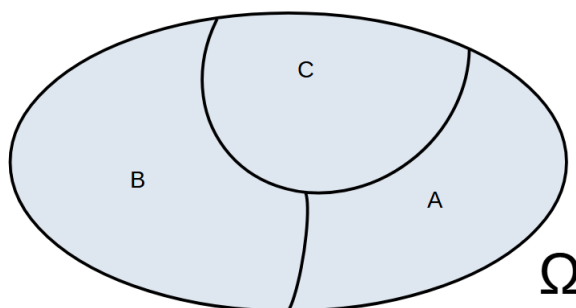
II Formule des probabilités totales.

II.1 Partition.

Définition : Une partition de l'univers est un ensemble d'évènements deux à deux incompatibles et dont la réunion est l'univers.

Traduction : ☀

D'une manière générale, une partition d'un ensemble est un « découpage » d'un ensemble en plusieurs sous-parties disjointes, telles que si on les réunit, on reconstitue l'ensemble tout entier.



Exemple : On tire une carte dans un jeu de 32 cartes et on regarde la couleur. On note :

- T l'évènement : « Tirer un trèfle », — K l'évènement : « Tirer un carreau »,
- P l'évènement : « Tirer un pique », — C l'évènement : « Tirer un coeur ».

Les évènements T, P, K et C forment une partition de l'univers. En effet, ils sont deux à deux incompatibles (on ne peut pas tirer une carte ayant deux couleurs), et leur réunion est l'univers (la couleur tirée est soit trèfle, soit pique, soit carreau, soit coeur).

Remarque : Soit A un évènement de l'univers Ω : A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers.

II.2 Formule des probabilités totales.

Propriété : Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n évènements formant une partition de l'univers Ω . Pour tout évènement B , on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B).$$

Traduction : ☀

La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins menant à cet évènement dans un arbre pondéré.

Démonstration. Nous démontrerons le cas particulier $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$, où A et B sont deux évènements.

On appelle e une éventualité de l'évènement B , et on note $R = B \cap A$ et $S = B \cap \bar{A}$.

- Puisque A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, l'éventualité e appartient soit à A , soit à $\bar{A}$ donc elle appartient soit à R , soit à S . On en déduit que $P(R \cup S) = P(B)$.
- L'éventualité e ne peut pas appartenir en même temps aux évènements A et $\bar{A}$ puisqu'ils sont incompatibles. Donc les évènements R et S sont incompatibles aussi, c'est-à-dire que $R \cap S = \emptyset$ et $P(R \cap S) = 0$.

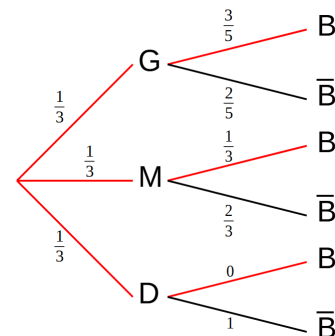
Par conséquent, $P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S) = P(R) + P(S)$.

- On en déduit la formule $P(B) = P(R) + P(S) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$.

□

Exemple : Reprenons l'exemple de la partie I avec la commode. D'après la propriété précédente, la probabilité de choisir une serviette blanche est :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap G) + P(B \cap M) + P(B \cap D) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{14}{45} \end{aligned}$$



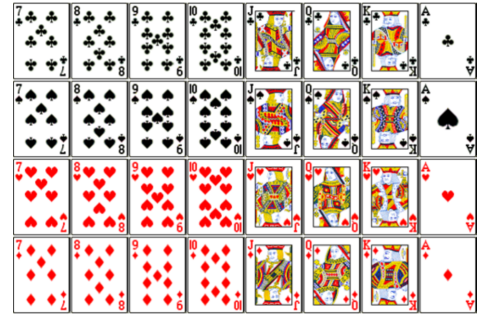
Propriété : Soient A et B deux évènements de l'univers Ω , avec A de probabilité non nulle.

On a la relation : $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$

Exemple : Considérons un jeu de 32 cartes. Notons T l'évènement : « Tirer un trèfle », et R l'évènement « Tirer un roi ».

$$P_T(R) = \frac{P(T \cap R)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{8}{32}} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Donc } P_T(\bar{R}) = 1 - P_T(R) = \frac{7}{8}$$



Objectif : Calculer la probabilité d'un évènement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

Communs : Exercices 37, 39 page 141, 70, 72 page 145.

Pour les plus rapides : Exercices 36, 38 page 141, 71 page 145, 73, 76 page 146.

Activité 4 page 137.

III Indépendance de deux évènements.

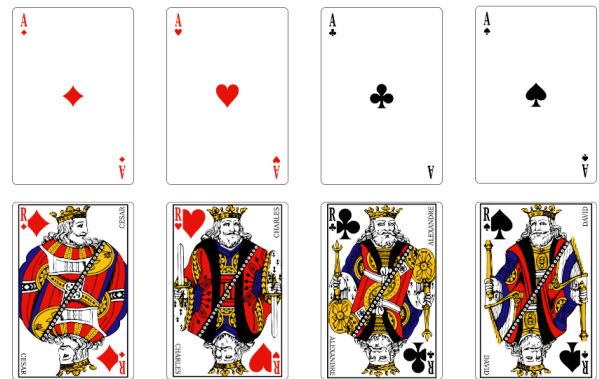
III.1 Définition.

Définition : Soient A et B deux évènements de l'univers Ω tels que $P(A) \neq 0$. On dit que l'évènement B est indépendant de l'évènement A si $P_A(B) = P(B)$.

Traduction : ☀

L'évènement B est indépendant de l'évènement A si la réalisation ou non de l'évènement A ne modifie pas la probabilité de l'évènement B .

Exemple : On tire au hasard une carte d'un paquet de huit cartes constitué de quatre as (trèfle, carreau, coeur, pique) et de quatre rois (trèfle, carreau, coeur, pique). Il y a équiprobabilité des tirages.



On considère l'évènement A : « Obtenir un trèfle », et l'évènement B : « Obtenir un as ». Intuitivement, les évènements A et B semblent indépendants : si on tire une carte trèfle, elle peut autant être un roi qu'un as, la couleur de la carte n'influence pas la figure qui s'y trouve.

Maintenant, démontrons-le.

$$P(A) = \frac{2}{8} = 0,25 \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ donc } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,125}{0,25} = 0,5.$$

$$\text{Or } P(B) = \frac{4}{8} = 0,5.$$

Nous constatons que $P_A(B) = P(B)$: l'évènement B est bien indépendant de l'évènement A .

III.2 Propriétés.

Propriété : Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles de l'univers Ω . L'évènement B est indépendant de l'évènement A si et seulement si A est indépendant de B .

Démonstration. L'égalité $P_A(B) = P(B)$ est équivalente à $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$, soit à $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Cette dernière relation équivaut à $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$, c'est-à-dire à $P_B(A) = P(A)$, ce qui signifie que l'évènement A est indépendant de l'évènement B . $\square$

Remarque : Ne pas confondre deux évènements indépendants et deux évènements incompatibles (dont l'intersection est vide).

Propriété : Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles de l'univers Ω .

- A et B sont indépendants si et seulement $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B , A et $\bar{B}$ et $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

Exemple : Reprenons l'exemple du paquet de huit cartes, constitué de quatre as et quatre rois.

$$P(A) \times P(B) = \frac{2}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{8}{64} = 0,125 = P(A \cap B).$$

Objectif : Déterminer si deux évènements sont indépendants ou non.

Communs : Exercices 77, 79 page 146, 81 page 147.

Pour les plus rapides : Exercices 41 à 45 page 141, 78 page 146, 80 page 147.