

Chapitre 5 : Fonction exponentielle de base a .

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Contenus : Les fonctions $x \mapsto a^x$ comme modèle continu d'évolution relative constante :

- Définition de la fonction $x \mapsto a^x$ pour x positif comme prolongement à des valeurs non entières positives de la suite géométrique $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$; extension à $\mathbb{R}_-$ en posant $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;
- Sens de variation selon les valeurs de a .
- Allure de la courbe représentative selon les valeurs de a .
- Propriétés algébriques : $a^{x+y} = a^x a^y$; $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$; $a^{nx} = (a^x)^n$ pour n entier relatif.
- Cas particulier de l'exposant $\frac{1}{n}$ pour calculer un taux d'évolution moyen équivalent à n évolutions successives.

Capacités attendues.

- Connaître et utiliser le sens de variation des fonctions de la forme $x \mapsto ka^x$, selon le signe de k et les valeurs de a .
- Connaître les propriétés algébriques des fonctions exponentielles et les utiliser pour transformer des écritures numériques ou littérales.
- Calculer le taux d'évolution moyen équivalent à des évolutions successives.

Commentaires.

- Les propriétés algébriques de la fonction $x \mapsto a^x$ sont admises, par extension des propriétés des puissances entières. Le lien est fait avec les suites géométriques.
- Le parallèle est fait entre le sens de variation de la fonction $x \mapsto a^x$ et celui des suites géométriques.
- Le calcul du taux d'évolution moyen se fait dans des contextes variés (taux mensuel équivalent à un taux annuel, évolution moyenne d'une population sur une période...).

Algorithmique : intercaler entre deux points déjà construits un troisième point ayant pour abscisse (respectivement pour ordonnée) la moyenne arithmétique (respectivement géométrique) des abscisses (respectivement des ordonnées) des deux points initiaux.

I Définition.

I.1 Définition.

Définition : Soit a un réel strictement positif. La fonction f qui à tout réel x associe a^x est définie de la manière suivante :

- si $x \in [0; +\infty[$, f est le prolongement à des valeurs non entières positives de la suite géométrique $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$;
- si $x \in]-\infty; 0]$, $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$.

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle de base a** .

Exemple : Considérons la fonction $f : x \mapsto 2^x$, fonction exponentielle de base 2 .

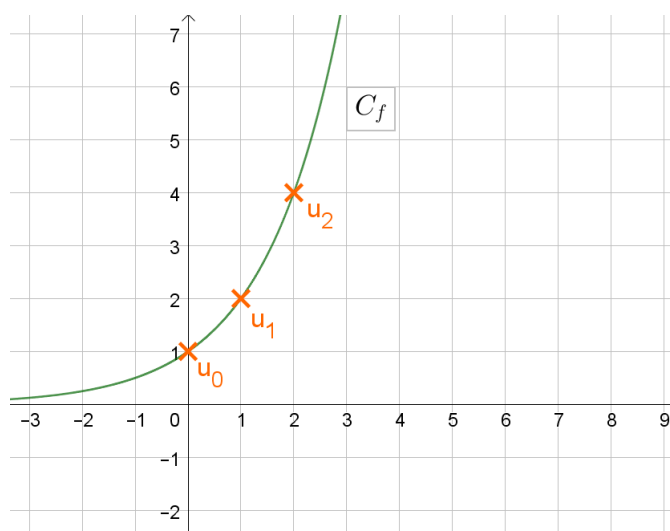
Déterminons les images de $3; \frac{2}{3}; -4, 5$:

$$f(3) = 2^3 = 8;$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2^{\frac{2}{3}} \approx 1.59;$$

$$f(-4,5) = 2^{-4,5} = \frac{1}{2^{4,5}} \approx 0,04.$$

La fonction exponentielle de base 2 est le prolongement continu de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.



Remarque :

- La fonction exponentielle de base a est définie comme un prolongement continu des suites géométriques de raison strictement positive. On passe du discret (suites géométriques) au continu (fonctions exponentielles).
- Pour tout réel $a > 0$, $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.
- Comme $a > 0$, pour tout réel x , $a^x > 0$.

Objectif : Calculer avec la fonction exponentielle de base a .

Communs : Exercice 1, 2, 3, 4, 5, 6 fiche 1.

Pour les plus rapides : Exercices 7 et 8 fiche.

II Variations et courbes représentatives.

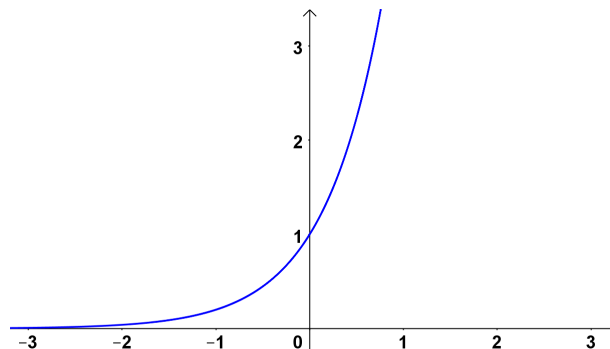
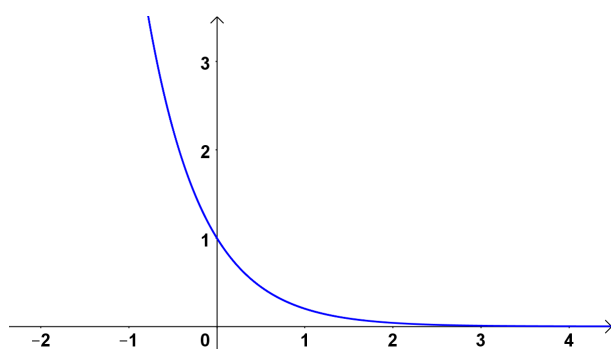
Propriété : Soit a un réel strictement positif.

- Si $0 < a < 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est constante sur $\mathbb{R}$: c'est la fonction $x \mapsto 1$.
- Si $a > 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemples :

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto 0,2^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

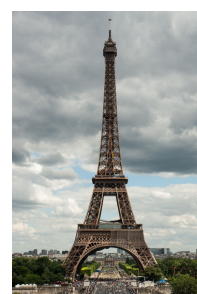
La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h : x \mapsto 5^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.



Remarque :

- Les variations de la fonction exponentielle de base a ($a > 0$) sont similaires à celles d'une suite géométrique de raison a ($a > 0$).
- Quelque soit $a > 0$, la courbe représentative d'une fonction exponentielle de base a est au dessus de l'axe des abscisses, et elle coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;1)$ car $a^0 = 1$.
- Lorsque $a > 1$, la courbe est de plus en plus « verticale » : on parle de croissance exponentielle.

Culture G : Le profil extérieur de la Tour Eiffel fait intervenir une fonction exponentielle, permettant d'optimiser la réaction de la structure métallique aux effets du vent.



Propriété : Soit a un réel strictement positif et k un réel non nul.

Si $k > 0$, alors la fonction $x \mapsto k \times a^x$ a le même sens de variation que la fonction $x \mapsto a^x$.

Si $k < 0$, alors la fonction $x \mapsto k \times a^x$ a le sens de variation contraire à celui de la fonction $x \mapsto a^x$.

Exemple : Considérons $f :$

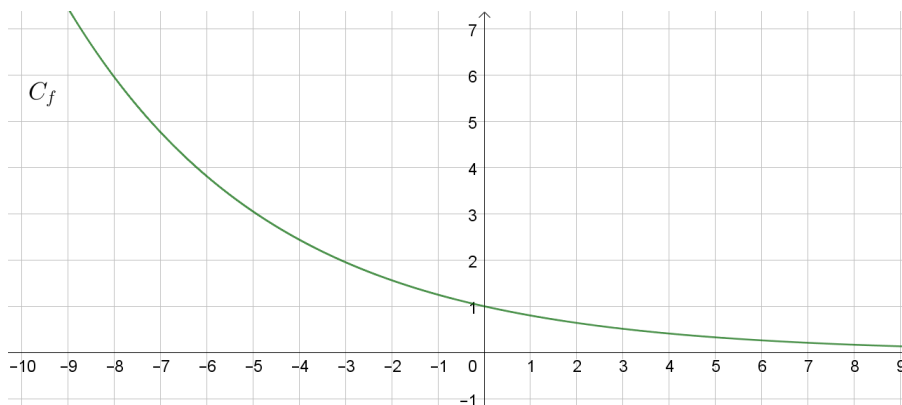
$x \mapsto 0,8^x$ la fonction

exponentielle de base 0,8.

Comme $0 < 0,8 < 1$, la

fonction f est décroissante

sur $\mathbb{R}$.

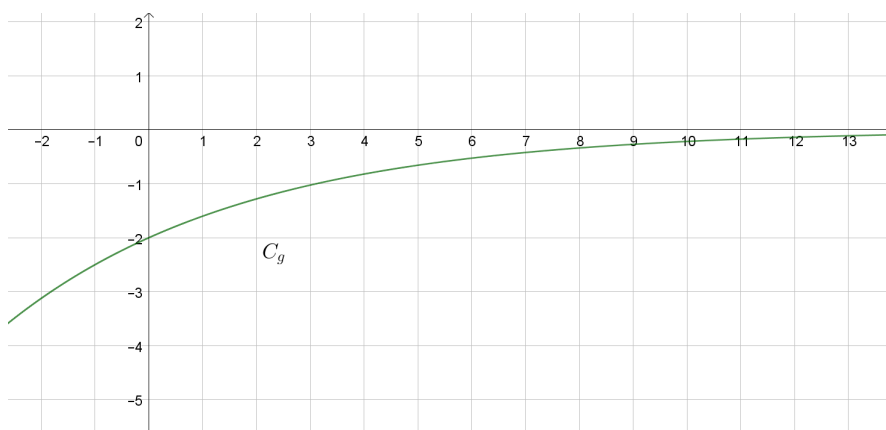


La fonction $g : x \mapsto -2 \times$

$0,8^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$

car f est décroissante et

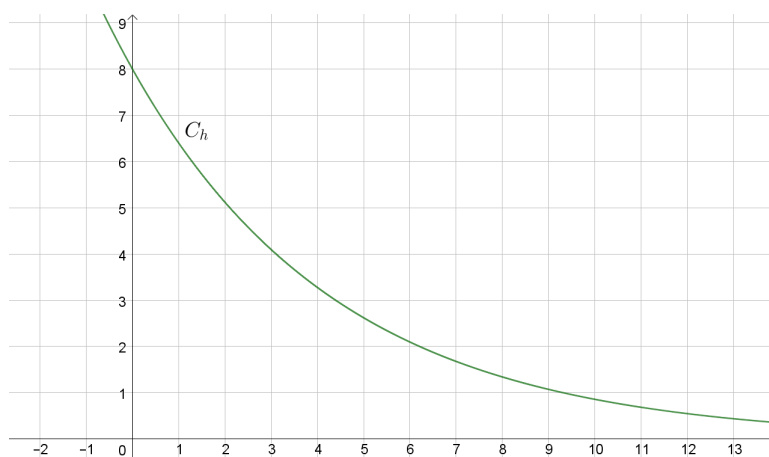
$-2 < 0$.



La fonction $h : x \mapsto 8 \times 0,8^x$

est décroissante sur $\mathbb{R}$ car f est

décroissante et $8 > 0$.



Objectif : Connaître et utiliser le sens de variation des fonctions de la forme

$x \mapsto a^x$ selon le signe de k et les valeurs de a .

Communs : Exercices 17, 18, 19, 20, 21 page 55.

Pour les plus rapides : Exercice 22 page 55, exercices 65, 66, 67, 68, 69 page 58.

III Propriétés algébriques.

Propriété : Soit a un nombre réel strictement positif, x et y deux réels et n un entier relatif :

$$— a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$— a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$a^{nx} = (a^x)^n$$

Exemples :

$$2,1^2 \times 2,1^3 = 2,1^{2+3} = 2,1^5 ;$$

$$\frac{1}{0,56^{-2}} = 0,56^{-(-2)} = 0,56^2 ;$$

$$\frac{1,015^6}{1,015^4} = 1,015^{6-4} = 1,015^2 ;$$

$$(0,19^{\frac{1}{3}})^3 = 0,19^{\frac{1}{3} \times 3} = 0,19^1 = 0,19.$$

Objectif : Connaître les propriétés algébriques des fonctions exponentielles et les utiliser pour transformer des écritures numériques ou littérales.

Communs : Exercices 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 page 55.

Pour les plus rapides : Exercices 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86 page 59.

IV Taux d'évolution moyen.

Définition : Soit T le taux d'évolution global correspondant à n évolutions successives.

Le taux d'évolution moyen de ces n évolutions est le taux t vérifiant $(1 + t)^n = 1 + T$.

Exemple : Une quantité a augmenté de 30% en un an. Le taux d'évolution global est donc de 30%.

Pour déterminer le taux d'évolution moyen t (mensuel), on procède de la manière suivante : douze augmentations de taux t sont équivalentes à une augmentation global de 30% donc $(1 + t)^{12} = 1,3$.

Pour déterminer t , on va alors utiliser la propriété suivante.

Propriété : Soit $a > 0$ et n un entier naturel non nul : $a^n = b \iff a = b^{\frac{1}{n}}$.

Exemple : Revenons-en à l'exemple précédent :

$$(1 + t)^{12} = 1,3 \iff t = 1,3^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0.0221 \text{ soit } 2,21\%.$$

Objectif : Calculer le taux d'évolution moyen équivalent à des évolutions successives.

Communs : Exercice 172 page 67.