

Chapitre 4 : Suites géométriques.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Contenus.

- Suites géométriques à termes positifs :
 - Moyenne géométrique de deux nombres positifs.
 - Expression en fonction de n du terme de rang n .
 - Somme des n premiers termes d'une suite géométrique ; notation Σ

Capacités attendues.

- Prouver que trois nombres sont ou ne sont pas les termes consécutifs d'une suite géométrique.
- Déterminer la raison d'une suite géométrique en utilisant une évolution.
- Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite géométrique.
- Calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.
- Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

Commentaires.

- Pour le calcul de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, on peut s'appuyer sur le placement à intérêts composés à taux constant avec versements réguliers.
- Faire le lien entre suite géométrique et croissance exponentielle.
- La notation Σ est travaillée sur des exemples variés (somme de carrés, de cubes, d'inverses...).

Algorithmique : Écrire en Python une fonction qui calcule la somme des n premiers termes carrés, cubes ou inverses ; établir le lien entre l'écriture de la somme avec Σ et les composantes de l'algorithme associé (initialisation, sortie, boucle, accumulateur, compteur).

Activité 3 page 112.

I Suites géométriques : définition et propriété.

Définition : Soit $q \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$. q est appelé la raison de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

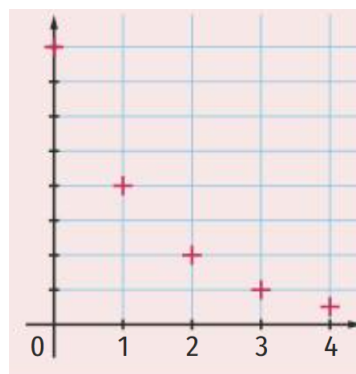


Exemple : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 6u_n$ pour tout entier naturel n est une suite géométrique de raison $q = 6$.

Remarque :

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique si et seulement si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante.
- Nous supposons pour la suite que $u_0 \geq 0$ et $q \geq 0$ afin que les suites géométriques en question soient à termes positifs comme l'exige le programme.

Le nuage de points associé à la représentation graphique d'une suite géométrique témoigne d'une croissance (ou d'une décroissance) exponentielle.



Propriété : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q . Alors :

- pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$
- soit $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Exemple : Si $u_0 = 5$ et si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n$, alors pour tout entier naturel n , $u_n = 5 \times 3^n$.

Objectif : Prouver que trois nombres sont ou ne sont pas les termes consécutifs d'une suite géométrique.

Communs : Exercices 88, 89, 90 page 24.

Pour les plus rapides : Exercice 1 fiche.

Objectif : Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite géométrique.

Communs : Exercices 2 et 3 fiche.

Exercices 94 et 97 page 25.

Pour les plus rapides : Exercices 95, 96, 98 à 102 page 25.

Objectif : Déterminer la raison d'une suite géométrique en utilisant une évolution.

Communs : Exercice 92 page 24.

Exercice 14 fiche.

Pour les plus rapides : Exercice 5 fiche.

II Moyenne géométrique.

Définition : La moyenne géométrique de deux nombres positifs a et b est la racine carrée du produit de ces deux nombres : $c = \sqrt{ab}$.

Exemple : La moyenne géométrique de 6 et 18 est $\sqrt{6 \times 18} = \sqrt{108} \approx 10,4$.

Propriété : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique à termes positifs, alors la moyenne géométrique de u_{n-1} et u_{n+1} est égale à u_n pour tout entier naturel non nul n .

Objectif : Calculer la moyenne géométrique de deux nombres.

Communs : Exercice 91 page 24.

Activité somme

III Somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Propriété : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors pour tout entier naturel n :

$$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque : On peut retenir $S = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$.

Exemple : $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10} = 1 \times \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2047$.

Objectif : Calculer la somme des n premiers termes consécutifs d'une suite géométrique.
--

Communs : Exercices 54, 55 page 21.

Pour les plus rapides : Exercices 106, 107 page 26.

Objectif : Calculer la somme des n premiers termes consécutifs d'une suite géométrique.
--

Exercices problèmes : 115, 119 page 27, 133 page 28.
--