

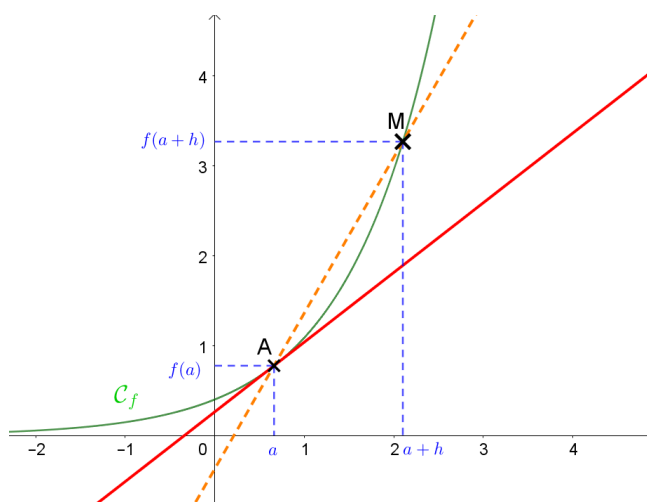
Chapitre 2 : La fonction inverse.

1 Rappels sur la dérivation.

1.1 Taux de variation.

Considérons f une fonction définie sur un intervalle I , a un nombre réel appartenant à I et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a .

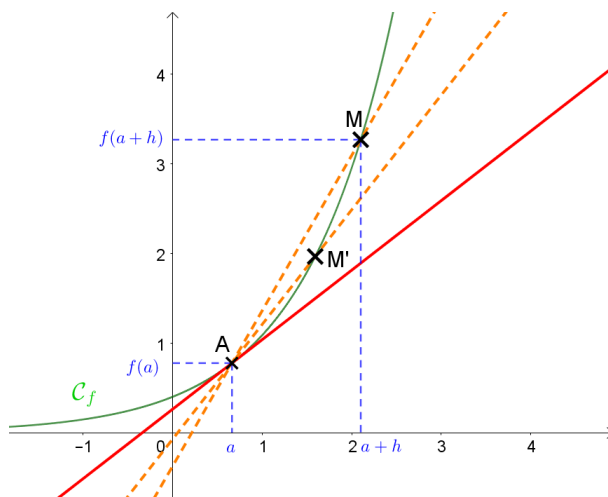
Soit h un réel non nul tel que $a + h \in I$ et M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a + h$.



Le coefficient directeur de la sécante (AM) est égal à $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$: il est appelé

.....

Si le point M se rapproche du point A , autrement dit si h tend vers 0, alors la sécante (AM) se rapproche de



Le coefficient directeur de la droite (AM), qui vaut $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, se rapproche donc de du coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A, égal à $f'(a)$:

Traduction mathématique : Soit f une fonction définie sur un intervalle et a un nombre fixé de cet intervalle.

Le nombre dérivé de la fonction f en a , noté $f'(a)$, est, si elle existe, la limite finie quand h tend vers 0 du taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ de la fonction f au point a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

1.2 Dérivée de fonctions composées.

Propriétés : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel.

- La fonction f définie sur I par $f : x \mapsto ku(x)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, $f'(x) = \dots\dots\dots$
- La fonction f définie sur I par $f : x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, $f'(x) = \dots\dots\dots$

Exemple :

.....

Propriétés : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

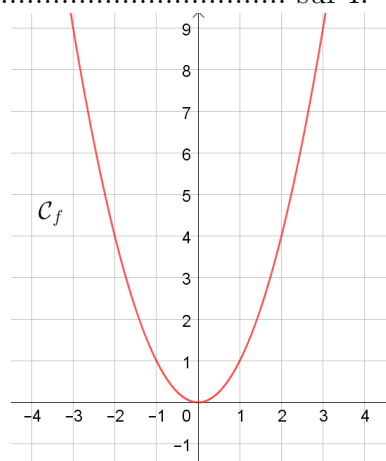
- Si, pour tout réel x , $f'(x) \geq 0$, alors f est sur I.
- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$, alors f est sur I.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

Sur $]-\infty; 0]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Sur $[0; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.



2 Dérivée et variations de la fonction inverse.

On rappelle que la fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Propriété : La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

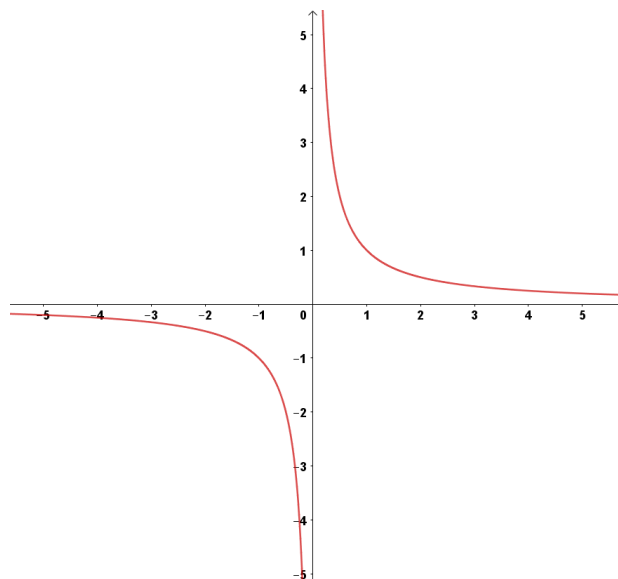
.....

.....

Exemple : $f'(1) = -1$ et $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

Propriété : La fonction inverse est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole composée de deux branches symétriques par rapport à l'origine du repère.



3 Comportement aux bornes de l'ensemble de définition.

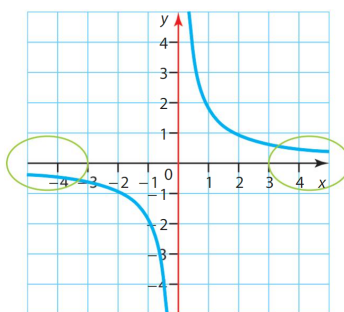
3.1 Limites de la fonction inverse.

Propriété : Soit x un nombre réel strictement positif. On peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut si l'on choisit x suffisamment grand. On note :

x	10	20	100	1000	2000
$\frac{1}{x}$	0,1	0,05	0,01	0,001	0,0005

Propriété : Soit x un nombre réel strictement négatif. On peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut si l'on choisit x suffisamment petit. On note

x	-10	-20	-100	-1000	-2000
$\frac{1}{x}$	-0,1	-0,05	-0,01	-0,001	-0,0005

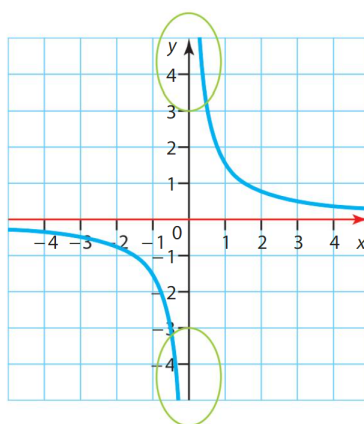


Propriété : On peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut dès lors que x est choisi suffisamment proche de 0 en restant strictement positif. On note

x	10	1	0,1	0,01	0,001
$\frac{1}{x}$	0,1	1	10	100	1000

Propriété : On peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi petit que l'on veut dès lors qu'on choisi x suffisamment proche de 0 en restant strictement négatif. On note :

x	-10	-1	-0,1	-0,01	-0,001
$\frac{1}{x}$	-0,1	-1	-10	-100	-1000



3.2 Asymptotes

En $-\infty$ et $+\infty$, l'hyperbole représentant la fonction inverse se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses : on dit que l'axe des abscisses est à l'hyperbole en $-\infty$ et $+\infty$.

Lorsque x se rapproche de 0, l'hyperbole représentant la fonction inverse se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées : on dit que l'axe des ordonnées est à l'hyperbole en 0.