

# Chapitre 1 : Suites numériques.

Eliot ROY

2022-2023

## Points du programme.

### Contenus.

- Suites arithmétiques :
  - Moyenne arithmétique de deux nombres.
  - Expression en fonction de  $n$  du terme de rang  $n$ .
  - Somme des  $n$  premiers termes d'une suite arithmétique ; notation  $\Sigma$
- Suites géométriques à termes positifs :
  - Moyenne géométrique de deux nombres positifs.
  - Expression en fonction de  $n$  du terme de rang  $n$ .
  - Somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique ; notation  $\Sigma$

### Capacités attendues.

- Prouver que trois nombres sont ou ne sont pas les termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Déterminer la raison d'une suite arithmétique ou géométrique en utilisant une évolution.
- Exprimer en fonction de  $n$  le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Calculer la somme des  $n$  premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

### Commentaires.

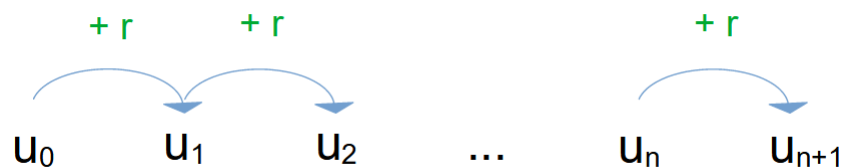
- Pour le calcul de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, on peut s'appuyer sur le placement à intérêts composés à taux constant avec versements réguliers.
- Faire le lien entre suite arithmétique (resp. géométrique) et croissance linéaire (resp. exponentielle).
- La notation  $\Sigma$  est travaillée sur des exemples variés (somme de carrés, de cubes, d'inverses...).

**Algorithmique :** Ecrire en Python une fonction qui calcule la somme des  $n$  premiers termes carrés, cubes ou inverses ; établir le lien entre l'écriture de la somme avec  $\Sigma$  et les composantes de l'algorithme associé (initialisation, sortie, boucle, accumulateur, compteur).

# 1 Suites arithmétiques.

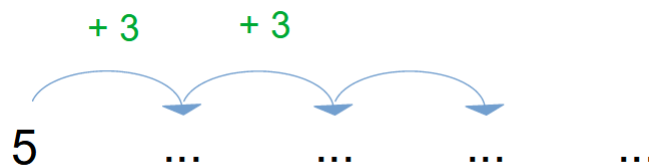
## 1.1 Définition et propriété.

Une suite arithmétique est une suite dont chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent un nombre réel constant  $r$ , appelé raison.

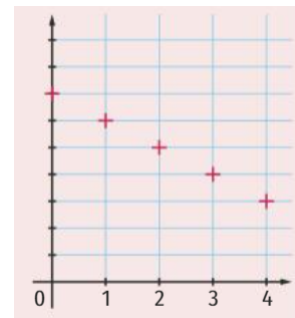


**Traduction mathématique :** Soit  $r \in \mathbb{R}$ . Une suite  $(u_n)$  est dite arithmétique de raison  $r$  si et seulement si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + r$ .

*Exemple :* Soit  $(u_n)$  une suite définie par  $u_0 = 5$ , pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + 3$  : la suite  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = 3$ .



La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés : on parle de croissance ou de décroissance linéaire.



On se propose d'établir un résultat permettant d'obtenir directement le terme  $u_n$  d'une suite arithmétique sans calculer les termes précédents.

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ , exprimons chaque terme en fonction du précédent et ajoutons membres à membres les égalités obtenues :

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$$u_3 = u_2 + r$$

...

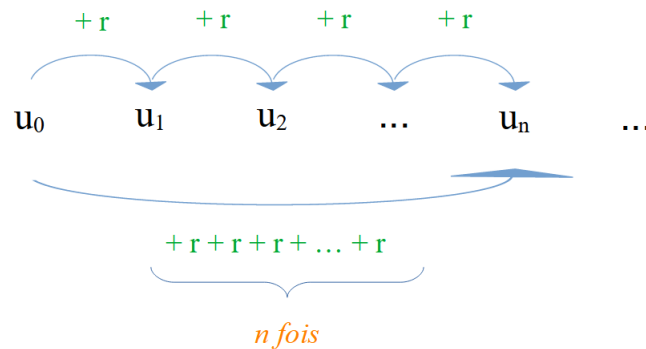
$$u_n = u_{n-1} + r$$

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}) + u_n = u_0 + (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}) + nr$$

Donc  $u_n = u_0 + nr$ .

**Traduction mathématique :** Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ . Alors :

- pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = u_0 + nr$
- soit  $p \in \mathbb{N}$ , pour tout  $n \geq p$ ,  $u_n = u_p + (n - p)r$



*Exemple :* Si  $u_0 = 5$  et si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + 3$ , alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 5 + 3n$ .

Par exemple, pour calculer  $u_{50}$ , il n'est pas nécessaire de connaître  $u_{49}$  :

$$u_{50} = 5 + 3 \times 50 = 155$$

Sans cette formule, il aurait fallu calculer  $u_0, u_1, u_2, \dots$  jusqu'à  $u_{49}$ .

|                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Objectif : Prouver que trois nombres sont ou ne sont pas les termes consécutifs d'une suite arithmétique. |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                        |
|------------------------|
| Exercices 1 à 3 fiche. |
|------------------------|

|                             |
|-----------------------------|
| Exercices 58 et 59 page 22. |
|-----------------------------|

|                         |
|-------------------------|
| Exercices 4 et 5 fiche. |
|-------------------------|

|                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Objectif : Exprimer en fonction de $n$ le terme général d'une suite arithmétique. |
|-----------------------------------------------------------------------------------|

|                          |
|--------------------------|
| Exercices 6, 7, 8 fiche. |
|--------------------------|

|                      |
|----------------------|
| Exercice 74 page 23. |
|----------------------|

|                    |
|--------------------|
| Exercices 9 fiche. |
|--------------------|

|                               |
|-------------------------------|
| Exercices 27, 28, 29 page 19. |
|-------------------------------|

|                            |
|----------------------------|
| Exercices 64 à 73 page 23. |
|----------------------------|

|                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Objectif : Déterminer la raison d'une suite arithmétique en utilisant une évolution. |
|--------------------------------------------------------------------------------------|

|                                   |
|-----------------------------------|
| Exercices 30 page 19 et 10 fiche. |
|-----------------------------------|

|                           |
|---------------------------|
| Exercices 62, 63 page 22. |
|---------------------------|

|                           |
|---------------------------|
| QF moyenne de deux notes. |
|---------------------------|

## 1.2 Moyenne arithmétique de deux nombres.

**Définition :** La moyenne arithmétique de deux nombres  $a$  et  $b$  est la demi-somme de ces deux nombres :  $c = \frac{a+b}{2}$ .

*Exemple :* La moyenne arithmétique de 6 et 18 est  $\frac{6+18}{2} = \frac{24}{2} = 12$ .

Considérons  $(u_n)$  une suite arithmétique. Alors d'après ce qu'on a dit précédemment, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = u_0 + (n+1)r = u_0 + nr + r$$

$$u_{n-1} = u_0 + (n-1)r = u_0 + nr - r$$

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_0 + 2nr$$

$$\frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = u_0 + nr$$

Or  $u_0 + nr = u_n$ . Donc  $\frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = u_n$

**Traduction mathématique :** Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique. Alors pour tout entier naturel  $n$  non nul, la moyenne arithmétique de  $u_{n-1}$  et  $u_{n+1}$  est égale à  $u_n$ .

|                                                              |
|--------------------------------------------------------------|
| Objectif : Calculer la moyenne arithmétique de deux nombres. |
| Exercice 18 page 19.                                         |
| Exercice 60 page 22.                                         |
| Exercice 61 page 22.                                         |

|                    |
|--------------------|
| Activité 2 page 8. |
|--------------------|

### 1.3 Somme des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique.

**Propriété :** Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ . Alors pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$

**Remarque :**

- On peut retenir  $S = \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}$
- On note  $\sum_{i=0}^n u_i$  la somme  $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

*Exemple :* Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 5$  et de raison  $r = 2$ .

La somme des 17 premiers termes de la suite se calcule de la manière suivante :

$$\sum_{i=0}^{16} u_i = 17 \times \frac{u_0 + u_{16}}{2}.$$

Calculons donc  $u_{16}$ . Puisque  $u$  est une suite arithmétique, on sait d'après la propriété précédente que  $u_{16} = u_0 + 16 \times r = 5 + 16 \times 2 = 37$ .

Donc  $\sum_{i=0}^{16} u_i = 17 \times \frac{5+37}{2} = 357$ .

La somme des 17 premiers termes de la suite  $u$  vaut donc 357.

**Remarque :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{i=0}^n i$  est la somme des  $n$  premiers termes de la suite arithmétique  $(u_n)$  définie par  $u_n = n$  pour tout entier naturel  $n$ . D'après la formule de la propriété 5, on a donc  $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

|                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------|
| Objectif : Calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique. |
| Exercices 32, 33 page 20.                                                    |
| Exercices 35, 36, 37 page 20.                                                |

|                          |
|--------------------------|
| Interrogation formative. |
|--------------------------|

## 2 Suites géométriques.

### 2.1 Définition et propriété.

**Définition 6 :** Soit  $q \in \mathbb{R}$ . Une suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q$  si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = q \times u_n$ .  $q$  est appelé la raison de la suite géométrique  $(u_n)$

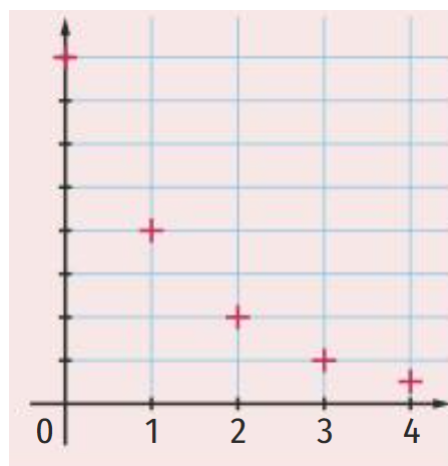


*Exemple :* La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 8$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = 6u_n$  pour tout entier naturel  $n$  est une suite géométrique de raison  $q = 6$ .

#### Remarque :

- Soit  $(u_n)$  une suite de réels non nuls. La suite  $(u_n)$  est géométrique si et seulement si la suite de terme général  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  est constante.
- Nous supposons pour la suite que  $u_0 \geq 0$  et  $q \geq 0$  afin que les suites géométriques en question soient à termes positifs comme l'exige le programme.

Le nuage de points associé à la représentation graphique d'une suite géométrique témoigne d'une croissance (ou d'une décroissance) exponentielle.



**Propriété 7 :** Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ . Alors :

- pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = u_0 \times q^n$

— soit  $p \in \mathbb{N}$ , pour tout  $n \geq p$ ,  $u_n = u_p \times q^{n-p}$

*Exemple* : Si  $u_0 = 5$  et si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 3u_n$ , alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 5 \times 3^n$ .

|                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Objectif : Prouver que trois nombres sont ou ne sont pas les termes consécutifs d'une suite géométrique. |
| Exercices 88, 89, 90 page 24.                                                                            |
| Exercice 11 fiche.                                                                                       |

|                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------|
| Objectif : Exprimer en fonction de $n$ le terme général d'une suite géométrique. |
| Exercices 12 et 13 fiche.                                                        |
| Exercices 94 et 97 page 25.                                                      |
| Exercices 95, 96, 98 à 102 page 25.                                              |

|                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Objectif : Déterminer la raison d'une suite géométrique en utilisant une évolution. |
| Exercice 92 page 24.                                                                |
| Exercice 14 fiche.                                                                  |
| Exercice 15 fiche.                                                                  |

## 2.2 Moyenne géométrique.

**Définition 8** : La moyenne géométrique de deux nombres positifs  $a$  et  $b$  est la racine carrée du produit de ces deux nombres :  $c = \sqrt{ab}$ .

*Exemple* : La moyenne géométrique de 6 et 18 est  $\sqrt{6 \times 18} = \sqrt{108} \approx 10,4$ .

**Propriété 9** : Si  $(u_n)$  est une suite géométrique à termes positifs, alors la moyenne géométrique de  $u_{n-1}$  et  $u_{n+1}$  est égale à  $u_n$  pour tout entier naturel non nul  $n$ .

|                                                             |
|-------------------------------------------------------------|
| Objectif : Calculer la moyenne géométrique de deux nombres. |
| Exercice 91 page 24.                                        |

|                 |
|-----------------|
| Activité somme. |
|-----------------|

## 2.3 Somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique.

**Propriété 10 :** Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ . Alors pour tout entier naturel  $n$  :

$$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

**Remarque :** On peut retenir  $S = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$ .

*Exemple :*  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10} = 1 \times \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2047$ .

|                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| Objectif : Calculer la somme des $n$ premiers termes consécutifs d'une suite géométrique. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|

|                           |
|---------------------------|
| Exercices 54, 55 page 21. |
|---------------------------|

|                             |
|-----------------------------|
| Exercices 106, 107 page 26. |
|-----------------------------|

|                                         |
|-----------------------------------------|
| Exercices problèmes : 115, 119 page 27. |
|-----------------------------------------|

|                       |
|-----------------------|
| Exercice 133 page 28. |
|-----------------------|