

Chapitre 9 : Vecteurs, généralités.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Thème : Géométrie.

Introduire les vecteurs du plan comme outil permettant d'étudier des problèmes issus des mathématiques et des autres disciplines, en particulier la physique.

Contenus.

- Vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à la translation qui transforme M en M' . Direction, sens et norme.
- Égalité de deux vecteurs. Notation $\vec{u}$. Vecteur nul.
- Somme de deux vecteurs en lien avec l'enchaînement des translations. Relation de Chasles.
- Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- Expression des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et B .

Capacités attendues.

- Représenter géométriquement des vecteurs.
- Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.
- Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs.
- Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

Activité 1 page 136.

I Notion de vecteurs.

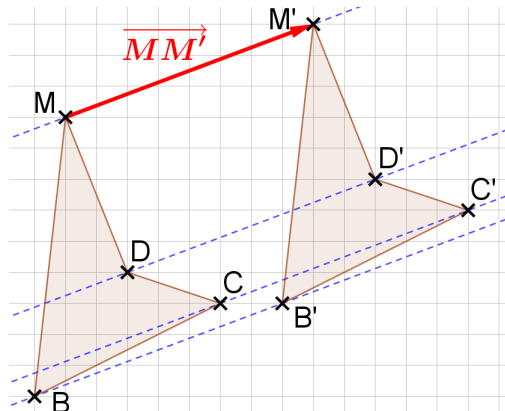
I.1 Définition.

Définition 1 : Soient M et M' deux points du plan. La translation qui transforme M en M' est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est représenté par une flèche : le point M est l'origine du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et le point M' en est l'extrémité.

Exemple :

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$, les points M, B, C ont pour images respectives les points M', B', C' .



Si M et M' sont deux points distincts du plan, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est caractérisé par :

- sa direction, celle de la droite (MM') ,
- son sens, celui de M vers M' ,
- sa norme, notée $||\overrightarrow{MM'}||$, qui correspond à la longueur MM' .

Exemple : Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour norme $||\overrightarrow{AE}|| = AE = 9$. La direction est celle de la droite (AE) et le sens est celui de A vers E .



Définition 2 : Soit M un point quelconque du plan. On appelle vecteur nul le vecteur $\overrightarrow{MM}$: on le note $\vec{0}$.

Remarque : Le vecteur nul n'a pas de direction, pas de sens, et a pour norme 0. La translation de vecteur nul transforme tout point en lui-même.

Objectif : Représenter géométriquement des vecteurs / l'image d'un point par une translation.

Communs : Exercices 1, 2, 3, 4 fiche A.

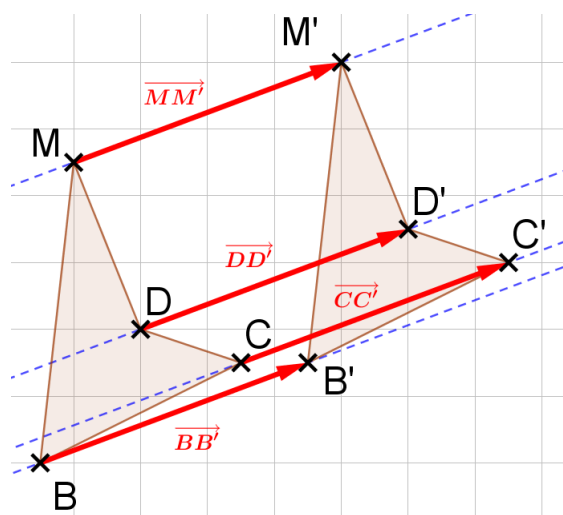
I.2 Égalité de deux vecteurs.

Définition 3 : Soient M, M', N, N' quatre points du plan.

Lorsque la translation qui transforme M en M' transforme également N en N' , on dit que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux, et on note $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$.

Exemple : Reprenons le premier exemple. On a :

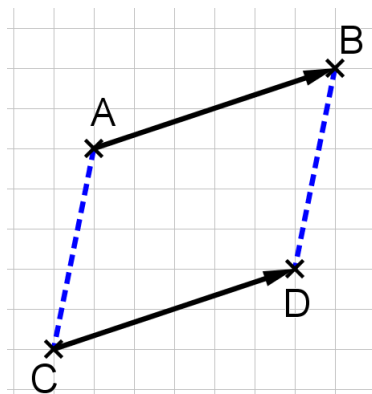
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}$$



Remarque : Deux vecteurs égaux ont la même direction, le même sens et la même norme.

Propriété 4 : Soient A, B, C et D quatre points.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.



Propriété 5 : Soient A et B deux points distincts du plan.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ si et seulement si M est le milieu de $[AB]$.

Objectif : Raisonner à partir des propriétés sur les égalités de vecteurs.

Communs : Exercices 35, 37, 38, 39 page 151.

Pour les plus rapides : Exercice 40 page 151.

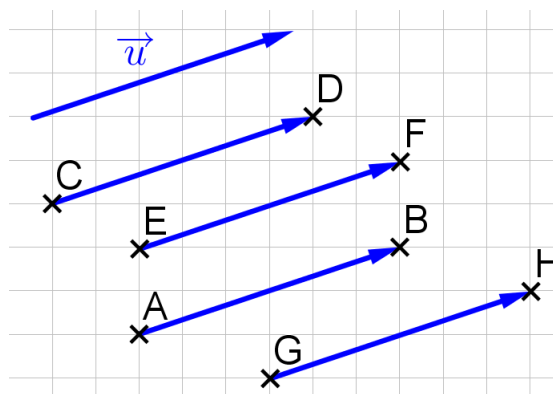
I.3 Représentants d'un vecteur.

Sur la figure ci-contre, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme :

- C en D ,
- E en F ,
- G en H .

On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont des représentants d'un même vecteur, que l'on peut écrire $\vec{u}$. Tous ces représentants ont la même direction, le même sens et la même norme.

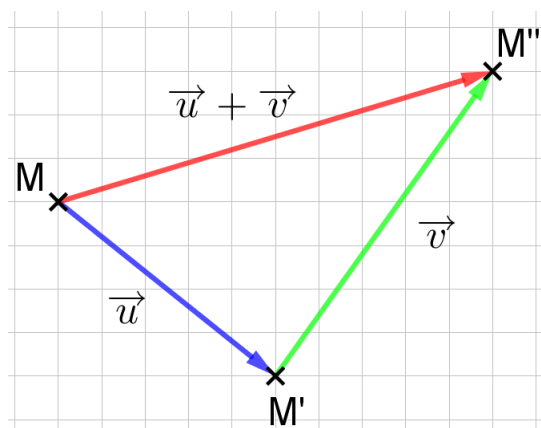


Activité 2 page 136.

II Somme et différence de vecteurs.

Définition 6 : La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Exemple :

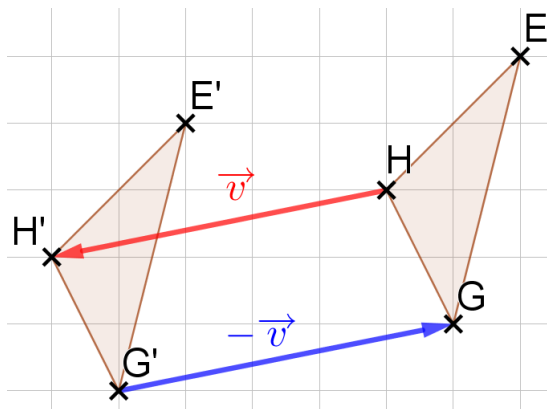


Définition 7 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $(-\vec{u})$ tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

La différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} - \vec{v}$, est le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$.

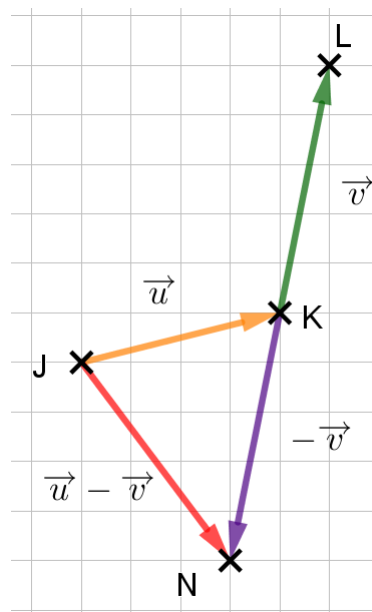
Exemple : Si on applique la translation de vecteur $\vec{v}$ à la figure EHG , on obtient la figure $E'H'G'$. La translation de vecteur $-\vec{v}$ permet de revenir à la figure initiale EHG .



Remarque : Soient A et B deux points du plan : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Exemple : Pour représenter le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$, on commence par représenter l'opposé du vecteur $\vec{v}$.

On peut ensuite représenter le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ en représentant le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$.



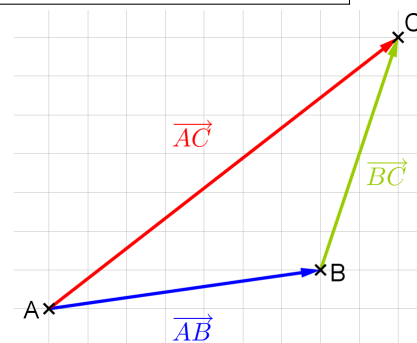
Remarque : Un vecteur non nul et son opposé ont la même direction, la même norme, mais des sens opposés.

Objectif : Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.

Communs : Exercices 41, 42, 43 page 151.

Pour les plus rapides : Exercices 44 page 151, 45 page 152, 77 page 154.

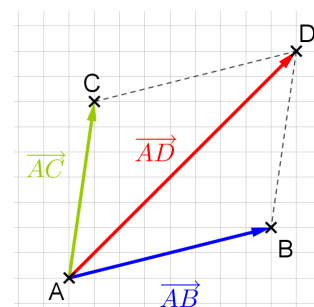
Propriété 8 - Relation de Chasles : Soient A, B, C et D quatre points du plan : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.



Propriété 9 - Règle du parallélogramme :

Soient A, B, C et D trois points.

$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.



Objectif : Raisonner avec la somme de vecteurs.

Communs : Exercices 78, 79 page 154, exercices 3 et 4 fiche B.

Pour les plus rapides : Exercice 80 page 154.

Activité 4 page 187.

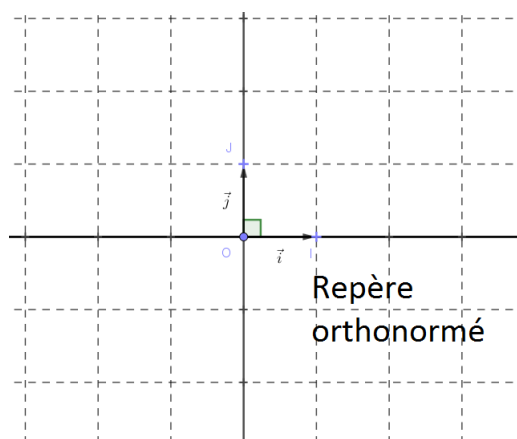
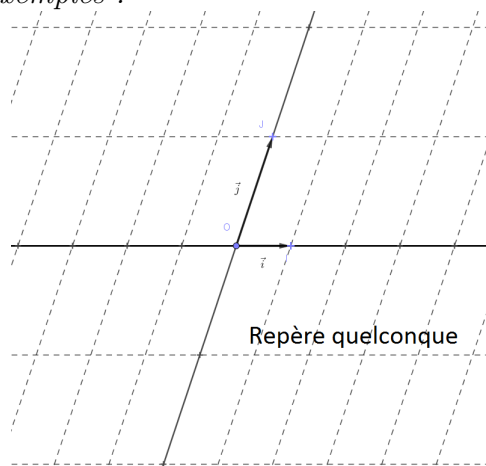
III Coordonnées.

III.1 Repère du plan

Définition 10 : Une base de vecteurs est un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de deux vecteurs non nuls qui n'ont pas la même direction. Elle est orthonormée si les directions des vecteurs sont perpendiculaires et si la norme des vecteurs est égale à 1.

Un repère du plan est la donnée d'un point O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$: on le note $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exemples :



III.2 Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.

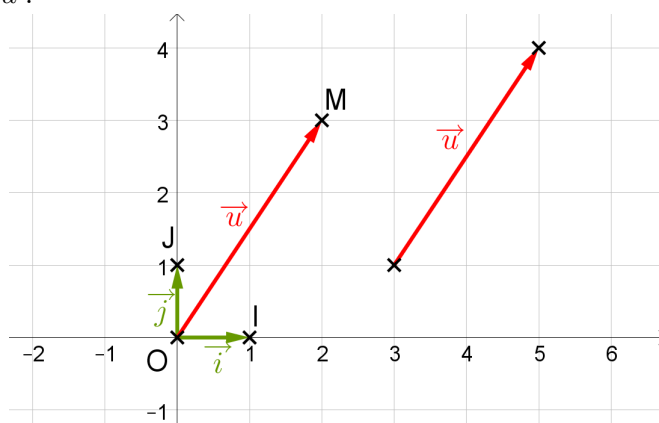
Définition 11 : Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont les coordonnées de l'unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Exemple : $\vec{i}$ a pour coordonnées $(1; 0)$

et $\vec{j}$ a pour coordonnées $(0; 1)$.

Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(2; 3)$.

On note $\vec{i}(1; 0)$, $\vec{j}(0; 1)$ et $\vec{u}(2; 3)$.

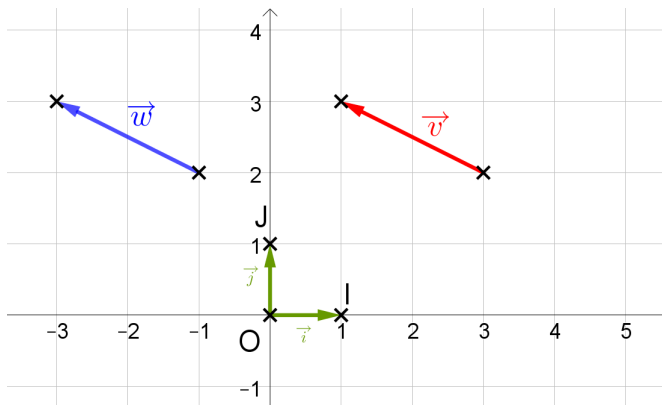


Remarque : Dans n'importe quelle base, le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $(0; 0)$.

Propriété 12 : Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

Exemple : Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a $\vec{v}(-2; 1)$ et $\vec{w}(-2; 1)$.

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc égaux :
 $\vec{v} = \vec{w}$.



Objectif : Lire les coordonnées d'un vecteur.

Communs : Exercices 15 page 147, 53 page 152, 55 page 152.

Pour les plus rapides : Exercice 18 page 148.

Objectif : Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées.

Communs : Exercices 1 et 2 fiche B.

III.3 Calculs avec les coordonnées.

Propriété 13 : Soient $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points et $\vec{u}(x; y)$ un vecteur :

- Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, alors $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
- la norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

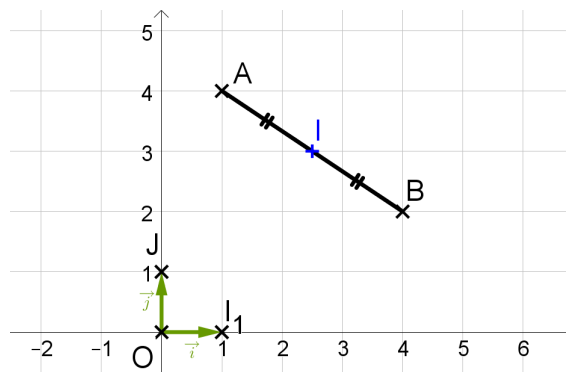
Exemple : Considérons le plan ci-contre.

$$x_B - x_A = 4 - 1 = 3 \text{ et } y_B - y_A = 2 - 4 = -2$$

donc $\overrightarrow{AB} = (3; -2)$.

La distance AB est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$



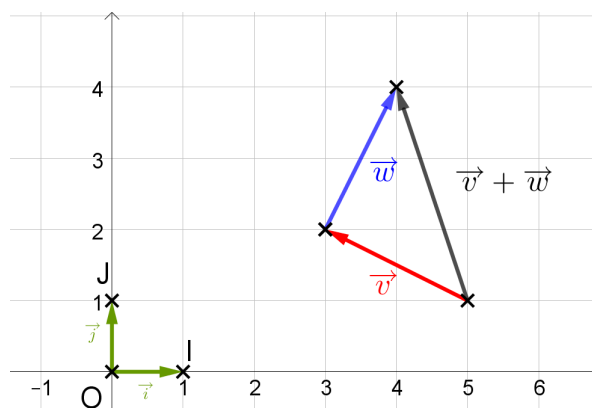
Propriété 14 : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé, et $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs, alors $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y')$.

Exemple : Dans le plan ci-contre, on a $\vec{v}(-2; 1)$,

$\vec{w}(1; 2)$.

En utilisant la propriété précédente, on obtient

$\vec{v} + \vec{w}(-2 + 1; 1 + 2)$, donc $\vec{v} + \vec{w}(-1; 3)$.



Propriété 15 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

Objectif : Calculer les coordonnées d'un vecteur / d'une somme de vecteurs.

Communs : Exercices 16 page 148, 54, 56 page 152

Pour les plus rapides : Exercices 57 page 152, 61, 64 page 153.

Objectif : Calculer la norme d'un vecteur.

Communs : Exercice 63 page 153.