

# Chapitre 7 : Résoudre des problèmes de géométrie.

Eliot ROY

2022-2023

## Points du programme.

**Thème :** Géométrie.

**Contenus.**

- Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

**Capacités attendues.**

- Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
- Calculer des longueurs, des angles, des aires, des volumes.
- Traiter des problèmes d'optimisation.

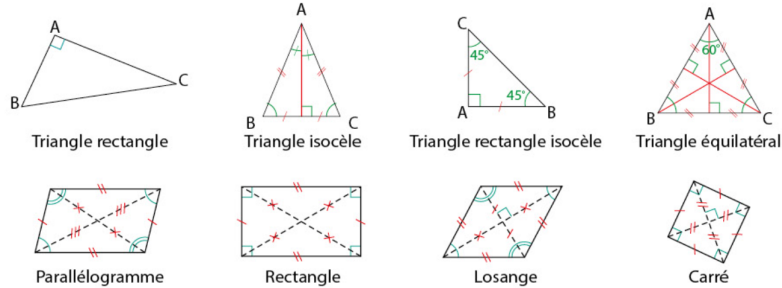
**Approfondissements possibles.**

- Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
- Expression de l'aire d'un triangle :  $\frac{1}{2}absin(C)$ .
- Formule d'Al-Kashi.
- Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.

# I Calculer des longueurs et des angles.

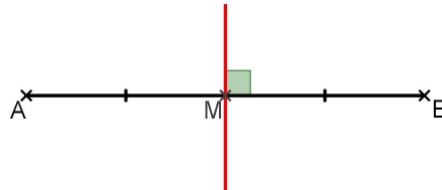
## I.1 Configurations usuelles du plan.

On rappelle les configurations usuelles du plan.



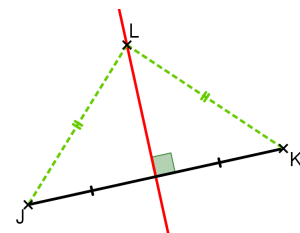
**Définition 1 :** La médiatrice d'un segment est la droite qui coupe ce segment perpendiculairement en son milieu.

*Exemple :*



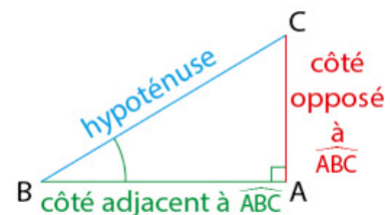
**Propriété 2 :** Un point M appartient à la médiatrice d'un segment si et seulement si il est situé à égale distance des extrémités de ce segment.

*Exemple :* Le point L appartient à la médiatrice du segment [JK] : il est donc situé à égale distance du point J et du point K.



## I.2 Calculer des angles.

**Définition 3 :** Soit ABC un triangle rectangle en A. On définit le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle  $\widehat{ABC}$  de la façon suivante :



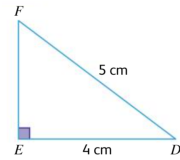
$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB}$$

*Exemple :* Dans le triangle DEF rectangle en E, on a :

$$\cos(\widehat{D}) = \frac{ED}{FD} = \frac{4}{5}. \text{ Donc } \widehat{D} = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36,9^\circ.$$



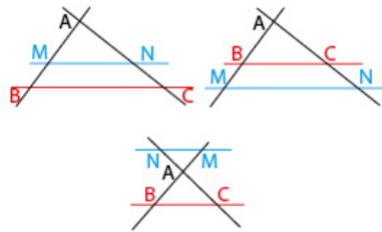
**Propriété 4 :** Soit ABC un triangle rectangle en A et  $\alpha$  la mesure, en degré, d'un angle aigu de ce triangle :

$$0 < \cos(\alpha) < 1$$

$$0 < \sin(\alpha) < 1$$

### I.3 Calculer des longueurs.

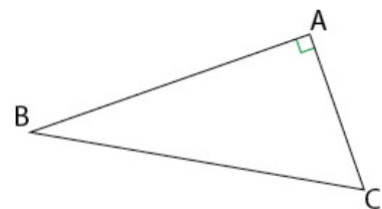
**Théorème 5 - Théorème de Thalès :** Soient (BM) et (CN) deux droites sécantes en un point A.



Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ .

Réciproquement, si  $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$  et si les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

**Théorème 6 - Théorème de Pythagore :** Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ .



**Propriété 7 :** Soit ABC un triangle rectangle en A et  $\alpha$  la mesure, en degré, d'un angle aigu de ce triangle. On a la relation :  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ .

Démonstration : La démonstration fait appel à l'utilisation du théorème de Pythagore.

Considérons l'angle  $\widehat{ABC}$  du triangle ABC rectangle en A. Alors :

$$\cos^2(\widehat{ABC}) + \sin^2(\widehat{ABC}) = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

**Propriété 8 :** Soient A, B et C trois points distincts du plan.

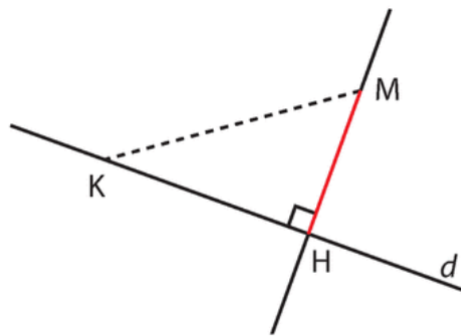
Les points A, B et C sont alignés dans cet ordre si, et seulement si,  $AC = AB + BC$ .

## II Projeté orthogonal et distance d'un point à une droite.

**Définition 9 :** Soit  $(d)$  une droite du plan et  $M$  un point n'appartenant pas à la droite  $(d)$ .

Le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(d)$  est le point  $H \in (d)$  telle que  $(MH) \perp (d)$ .

*Exemple :*



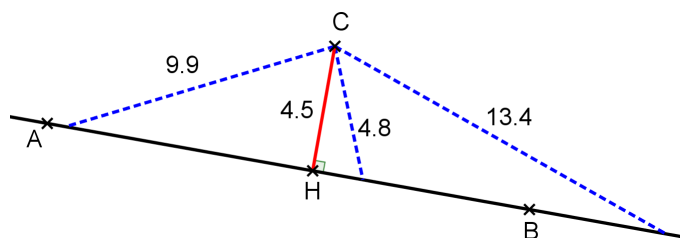
**Remarque :** Si  $M$  appartient à la droite  $(d)$ , alors il est son propre projeté orthogonal.

**Propriété 10 :** Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur une droite  $(d)$  est le point de  $(d)$  le plus proche de  $M$ .

Démonstration : Se référer exercice A de l'objectif 3 du plan de travail.

**Définition 11 :** On appelle distance d'un point  $M$  à une droite  $(d)$  la longueur du segment  $[MH]$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $(d)$ .

*Exemple :* Sur la figure ci-contre, la distance entre le point  $C$  et la droite  $(AB)$  est 4,5 : c'est la longueur du segment  $[CH]$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur la droite  $(AB)$ .



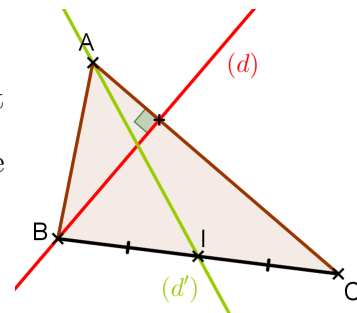
### III Géométrie dans le cercle et le triangle.

#### III.1 Droites remarquables d'un triangle.

**Définitions 12 :** Soit  $ABC$  un triangle

- Une hauteur est une droite passant par un sommet du triangle et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.
- Une médiane est une droite passant par un sommet du triangle et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

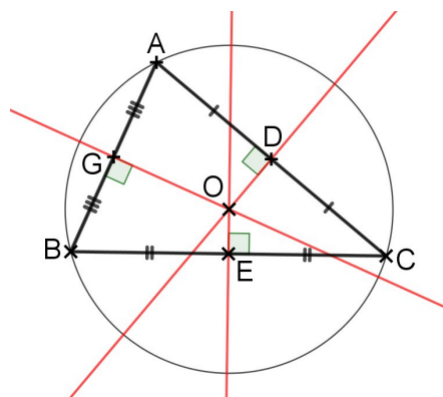
*Exemples :* Dans le triangle  $ABC$  ci-contre, la droite  $(d)$  est la hauteur issue du sommet  $B$ , et la droite  $(d')$  est la médiane issue du sommet  $A$ .



**Définition 13 :** Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les trois sommets du triangle.

**Propriété 14 :** Dans un triangle, les médiatrices des côtés sont concourantes en un point  $O$  qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

*Exemple :*

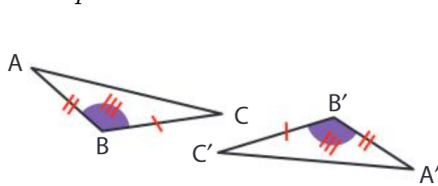


### III.2 Triangles égaux.

#### Propriétés 15 :

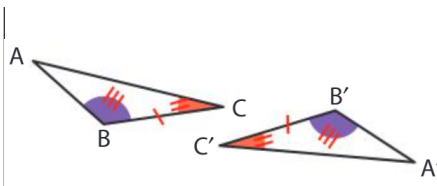
- Si deux triangles ont un angle de même mesure, compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors ces deux triangles sont égaux.
- Si deux triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement de même mesure, alors ils sont égaux.
- Si deux triangles ont des angles de même mesure, alors ils sont semblables.

Exemples :



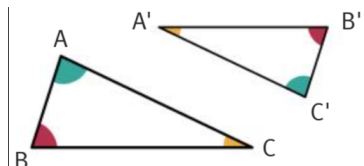
- $AB = A'B'$
- $BC = B'C'$
- $\widehat{B} = \widehat{B'}$

Donc les triangles sont égaux.



- $BC = B'C'$
- $\widehat{B} = \widehat{B'}$
- $\widehat{C} = \widehat{C'}$

Donc les triangles sont égaux.



- $\widehat{A} = \widehat{A'}$
- $\widehat{B} = \widehat{B'}$
- $\widehat{C} = \widehat{C'}$

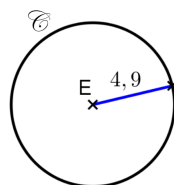
Donc les triangles sont semblables.

### III.3 Cercles et tangente.

**Définition 16 :** Soit O un point et r un nombre strictement positif.

Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que  $OM=r$ .

Exemple :



**Définition 17 :** La tangente à un cercle  $\mathcal{C}$  de centre O en un point M est la droite passant par M et perpendiculaire au rayon  $[OM]$ .

