

# Chapitre 6 : Variations de fonctions et résolutions graphiques d'inéquations.

Eliot ROY

2022-2023

## Points du programme.

### Contenus.

- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.

### Capacités attendues.

- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
- Résoudre une équation ou une inéquation du type  $f(x) = k$ ,  $f(x) < k$ , en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.
- Résoudre graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou inéquation du type  $f(x) = g(x)$ ,  $f(x) < g(x)$ .

### Exemples d'algorithme

- Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, algorithmes d'approximation numérique d'un extremum (balayage, dichotomie).
- Algorithme de calcul approché de longueur d'une portion de courbe représentative de fonction.

**Activité 1.**

Dans ce cours, on considérera  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de l'ensemble  $\mathbb{R}$ .

## I Sens de variation d'une fonction.

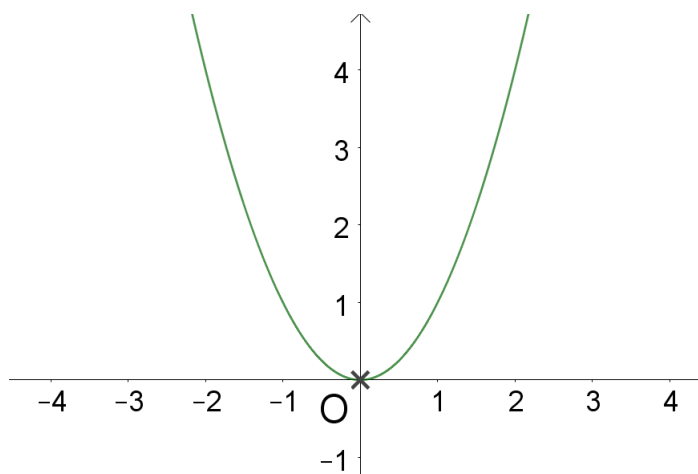
### Définitions :

- La fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $I$  lorsque pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a < b$  alors  $f(a) \leq f(b)$  : une fonction croissante conserve l'ordre.
- La fonction  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $I$  lorsque pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a < b$  alors  $f(a) \geq f(b)$  : une fonction décroissante change l'ordre.
- La fonction  $f$  est monotone sur  $I$  si elle est soit croissante sur  $I$ , soit décroissante sur  $I$ .
- La fonction  $f$  est constante sur l'intervalle  $I$  si pour tout  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $I$ ,  $f(a) = f(b)$ .

**Remarque :** On peut définir une fonction strictement croissante ou strictement décroissante en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition précédente.

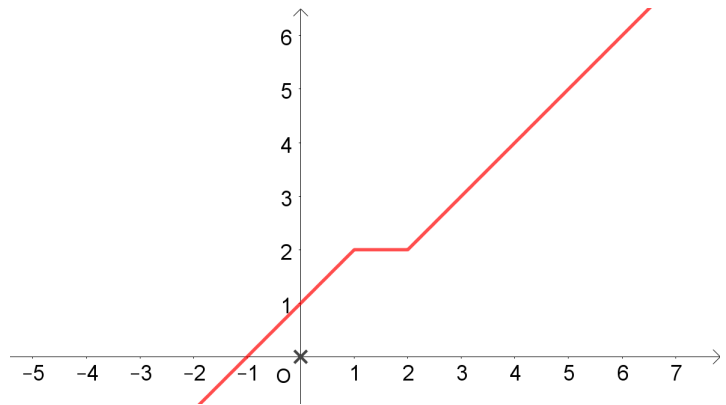
### *Exemples :*

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto x^2$  est représentée dans le repère ortho-normé ci-contre. Elle est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_-$  et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Elle n'est donc pas monotone sur  $\mathbb{R}$ .



La fonction  $h$  représentée ci-contre est monotone sur  $\mathbb{R}$ , plus précisément croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Cependant, elle n'est pas strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  puisqu'elle est constante sur l'intervalle  $[1;2]$ .



**Objectif :** Tracer la représentation graphique d'une fonction sur la calculatrice et décrire ses variations.

**Communs :** Exercices 44 et 45 page 229.

**Activité n°1 page 218.**

## II Tableau de variation.

Étudier les variations d'une fonction revient à chercher les intervalles sur lesquels elle est croissante, décroissante ou monotone. On regroupe les variations d'une fonction dans un tableau de variations.

Le tableau de variations d'une fonction  $f$  schématise les variations de cette fonction.

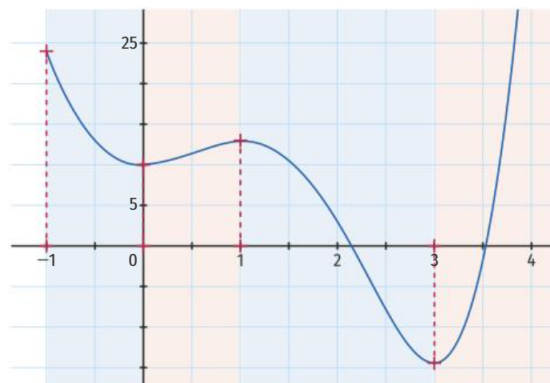
Il est composé de deux lignes :

- La première ligne indique les bornes de l'ensemble de définition de  $f$  et les valeurs en lesquelles  $f$  change de sens de variations.
- La seconde ligne indique par des flèches si la fonction croît ou décroît. On y place les images correspondant aux réels de la 1ère ligne. Une flèche qui descend (resp. qui monte) signifie que la fonction  $f$  est décroissante (resp. croissante).

*Exemple :*  $f$  est représentée ci-contre sur

l'intervalle  $[-1; +\infty[$ . Elle est :

- décroissante sur  $[-1; 0]$ ,
- croissante sur  $[0; 1]$ ,
- décroissante sur  $[1; 3]$ ,
- et croissante sur  $[3; +\infty[$ .



Le tableau de variations ci-dessous regroupe les variations de la fonction  $f$  :

| $x$ | -1 | 0  | 1  | 3   | $+\infty$ |
|-----|----|----|----|-----|-----------|
| $f$ | 24 | 10 | 13 | -14 |           |

Comme  $f$  n'est pas définie sur un intervalle bornée, on ne peut pas tracer complètement la courbe représentative de  $f$ . On admettra ici que la monotonie ne change pas au delà des limites du repère.

**Objectif : Relier représentation graphique et tableau de variations.**

**Communs** : Exercices 15, 16 page 226, 19 page 227.

Exercices 42 page 229, 52 page 230

**Pour les plus rapides** : Exercice 17 page 226, 19 page 227, 41 page 229, 53 page 230

Exercices 1, 2 page 223

**Objectif : Interpréter un tableau de variation.**

**Communs** : Exercices 3, 4 page 224, 47 page 229, 48 page 230

**Pour les plus rapides** : Exercices 49, 50, 51 page 230.

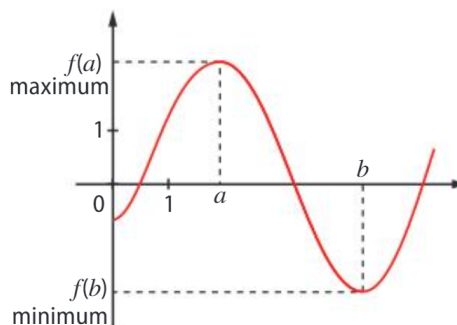
## Activité n°4 page 219.

### III Extremum d'une fonction.

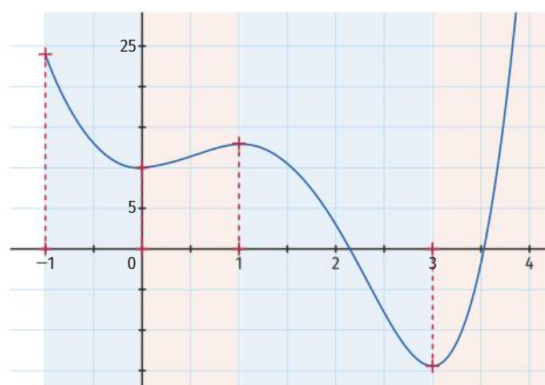
**Définition :** Soient  $a$  et  $b$  deux réels de l'intervalle  $I$ .

$f$  admet un maximum  $M$  sur  $I$  si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f(x) \leq M$  et qu'il existe  $a \in I$  tel que  $f(a) = M$ . On dit que  $M$  est le maximum de  $f$  sur  $I$ .

$f$  admet un minimum  $m$  sur  $I$  si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f(x) \geq m$  et qu'il existe  $a \in I$  tel que  $f(a) = m$ . On dit que  $m$  est le minimum de  $f$  sur  $I$ .



*Exemple :* La fonction précédente admet un minimum égal à -15 atteint en  $x = 3$ , mais n'admet pas de maximum.



**Remarque :** Un extremum est un maximum ou un minimum.

Certaines fonctions n'admettent pas de maximum ou de minimum.

**Objectif :** Déterminer graphiquement les extremum d'une fonction sur un intervalle.

**Communs :** Exercices 7, 8 page 225, 34, 36 page 228, 54 page 230

**Pour les plus rapides :** Exercices 35, 37 page 228, 55, 56, 57 page 230, 58 page 231

## IV Etudes comparatives.

### IV.1 Résolutions d'inéquations du type $f(x) \geq k$ .

**Définition :** Résoudre l'inéquation  $f(x) \geq k$  consiste à déterminer tous les réels  $x$  de  $I$  dont l'image par la fonction  $f$  est supérieure ou égale à  $k$ .

Graphiquement, les solutions de  $f(x) \geq k$  sont les abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  dont l'ordonnée est supérieure ou égale à  $k$ .

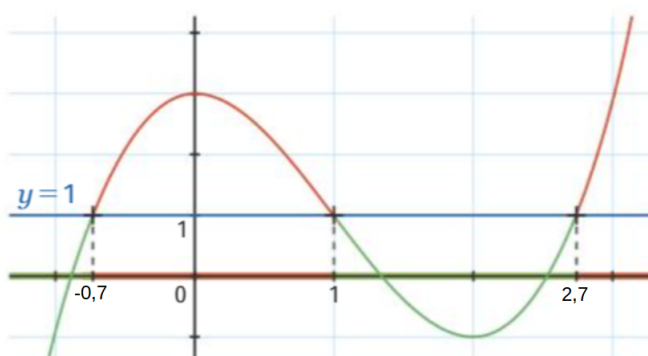
*Exemple :*

$$f(x) \geq 1 \iff x \in [-0,7; 1] \cup [2,7; +\infty[.$$

$$f(x) > 1 \iff x \in ]-0,7; 1[ \cup ]2,7; +\infty[.$$

$$f(x) \leq 1 \iff x \in ]-\infty; -0,7] \cup [1; 2,7].$$

$$f(x) < 1 \iff x \in ]-\infty; -0,7[ \cup ]1; 2,7[.$$



**Remarque :** L'ensemble des solutions est généralement un intervalle, une réunion d'intervalles ou l'ensemble vide  $\emptyset$ .

On peut adapter cette définition avec les symboles  $>$ ,  $<$  ou  $\leq$  : il faudra alors être attentif au sens des crochets dans l'ensemble solution.

### IV.2 Résolutions d'inéquations du type $f(x) \geq g(x)$ .

**Définition :** Soit  $g$  une fonction définie sur l'intervalle  $I$ .

Résoudre l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$  consiste à déterminer tous les réels  $x$  de  $I$  dont l'image par la fonction  $f$  est supérieure ou égale à l'image par la fonction  $g$ .

Graphiquement, les solutions de  $f(x) \geq g(x)$  sont les abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  situés au dessus ou sur  $\mathcal{C}_g$ .

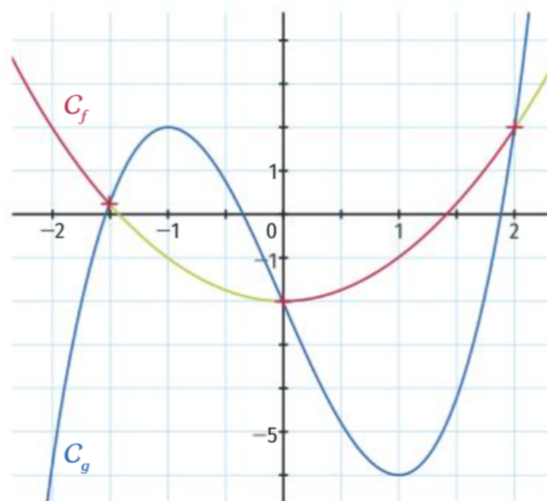
*Exemple :* Considérons  $f$  et  $g$  deux fonctions représentées ci-contre.

$$f(x) \geq g(x) \iff x \in ]-\infty; -1,5] \cup [0; 2].$$

$$f(x) > g(x) \iff x \in ]-\infty; -1,5[ \cup ]0; 2[.$$

$$f(x) \leq g(x) \iff x \in [-1,5; 0] \cup [2; +\infty[.$$

$$f(x) < g(x) \iff x \in ]-1,5; 0[ \cup ]2; +\infty[.$$



**Objectif :** Résoudre une équation ou une inéquation par la méthode graphique.

**Communs :** Exercice 43 page 202.

**Pour les plus rapides :** Exercices 1, 2, 3 fiche B.

**Objectif :** Résoudre une équation ou une inéquation à l'aide d'un logiciel.

**Communs :** Prévoir un TP informatique.