

Chapitre 5 : Probabilités.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Contenus.

- Ensemble (univers) des issues. Évènements. Réunion, intersection, complémentaire.
- Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un évènement : somme des probabilités des issues.
- Relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
- Dénombrement à l'aide de tableaux.

Capacités attendues.

- Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies à priori.
- Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
- Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.

I Vocabulaire.

I.1 Expérience aléatoire.

Définitions :

- Une expérience est dite aléatoire si on ne peut pas savoir à l'avance quel en sera le résultat.
- Un résultat d'une expérience aléatoire est appelé une issue.
- L'ensemble des issues, noté Ω , est appelé univers de l'expérience aléatoire.

Exemple : On lance un dé (non truqué) à six faces. C'est une expérience aléatoire car on ne peut pas prévoir à l'avance le chiffre qui va apparaître. Les issues de cette expérience sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 : elles constituent l'univers de l'expérience aléatoire. On note $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. On tire une carte parmi un jeu de 32 cartes et on observe sa couleur. Cette expérience a 4 issues possibles et l'univers associé est $\Omega = \{\diamond; \heartsuit; \spadesuit; \clubsuit\}$.

Pour la suite de la leçon, on notera l'univers Ω .

I.2 Évènement.

Définition :

- Un évènement est une partie de l'univers Ω : c'est un ensemble d'issues.
- Une issue x_i réalise un évènement A lorsque x_i est un élément de A.
- Un évènement élémentaire est un évènement qui ne contient qu'une seule issue.
- Un évènement certain est un évènement qui est réalisé par toutes les issues.
- Un évènement impossible est un évènement qui n'est réalisé par aucune issue : on le note $\emptyset$.
- Soit A un évènement de Ω . L'évènement contraire de l'évènement A, noté $\bar{A}$ ou $\Omega \setminus A$, est formé des issues qui ne réalisent pas A.

Exemple : On lance un dé (non truqué) à six faces.

L'évènement A : « Obtenir un nombre pair » est un évènement constitué des issues 2 ; 4 et 6 : on note $A = \{2; 4; 6\}$.

Son évènement contraire est l'évènement $\bar{A}$: « Obtenir un nombre impair » , constitué des issues 1 ; 3 et 5 : on note $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$.

L'évènement B : « Obtenir un chiffre entre 1 et 6 » est certain : il est constitué des issues 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6. C'est donc l'univers Ω : on a $B = \Omega$.

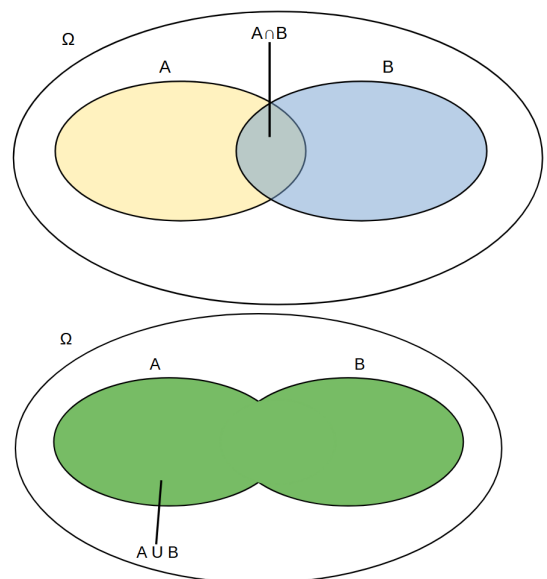
L'évènement C : « Obtenir le chiffre 7 » est impossible car les issues de l'expérience sont des chiffres compris entre 1 et 6 : $C = \emptyset$.

Remarque : On dit aussi que $\bar{A}$ est le complémentaire de A .

I.3 Réunion, intersection, complémentaire.

Définitions : Soient A et B deux évènements.

- L'intersection de A et B est l'évènement constitué des issues qui réalisent à la fois l'évènement A et l'évènement B : on le note $A \cap B$ et on lit « A inter B ».
- La réunion de A et B est l'évènement constitué des issues qui réalisent l'évènement A ou l'évènement B , c'est-à-dire au moins l'un des deux évènements : on le note $A \cup B$ et on lit « A union B ».



Exemple : On lance un dé à six faces non truqué. On considère les évènements A : « Obtenir un nombre pair » et B « Obtenir un chiffre strictement plus petit que 3 ».

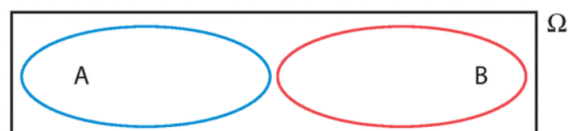
$A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 2\}$.

Donc $A \cap B = \{2\}$ et $A \cup B = \{1; 2; 4; 6\}$.

Définition : Soient A et B deux évènements.

On dit que A et B sont incompatibles si

$A \cap B = \emptyset$.



Exemple : Une urne contient 4 boules bleues numérotées de 1 à 4 et 3 boules vertes numérotées de 5 à 8.

Considérons l'évènement A : « Obtenir une boule bleue » et B : « Obtenir le numéro 6 ».

Ces deux évènements sont incompatibles : on ne peut pas obtenir une boule bleue portant le numéro 6.

Donc $A \cap B = \emptyset$.

II Probabilité.

II.1 Loi de probabilité.

Définition : Définir une loi de probabilité pour une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\} (n \geq 1)$, c'est associer à chaque issue e_i un nombre p_i de l'intervalle $[0; 1]$ tel que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Le nombre p_i est appelé probabilité de l'issue e_i .

Exemple : Une étude menée sur la répartition des groupes sanguins en France a montré que :

- 45% de la population est du groupe A,
- 9% du groupe B,
- 4% du groupe AB,
- 42% du groupe O.

On choisit au hasard une personne en France et on note son groupe sanguin. La loi de probabilité de cette expérience est donnée par le tableau :

Issue	A	B	AB	O
Probabilité	0,45	0,09	0,04	0,42

Remarque : Représenter dans un tableau la loi de probabilité associée à une expérience aléatoire permet d'être plus synthétique.

II.2 Probabilité d'une issue.

Définition : Lorsque toutes les issues constituant l'univers Ω ont la même probabilité, on dit qu'on est en situation d'équiprobabilité. La probabilité d'apparition de chacune des issues est alors égale à $\frac{1}{\text{nombre d'issues}}$.

Exemple : Une boîte contient trois boules indiscernables au toucher : une jaune, une verte et une rouge. Puisque les boules sont indiscernables au toucher, elles ont la même probabilité d'être tirée : on est en situation d'équiprobabilité. La loi de probabilité est :

Issue	jaune	verte	rouge
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Remarque : Une loi de probabilité ne se démontre pas, c'est une hypothèse du modèle choisi. Ce choix de modèle peut par exemple résulter d'hypothèses implicites d'équiprobabilité.

II.3 Probabilité d'un évènement.

Définition : La probabilité d'un évènement A, noté $P(A)$, est égale à la somme des probabilités des évènements élémentaires qui constituent A.

Exemple : Dans le cas de la répartition des groupes sanguins, la probabilité de l'évènement E : « Avoir un groupe sanguin différent de A » est :

$$P(E) = 0,09 + 0,04 + 0,42 = 0,55.$$

Propriété : En situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est donné par $P(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$.

Exemple : Un sac contient dix jetons indiscernables au toucher. Trois jetons portent le n°1, deux portent le n°2 et les cinq autres portent le n°3. On tire au hasard un jeton et on note son numéro.

Les jetons sont indiscernables au toucher donc ils ont la même probabilité d'être tirés : on est en situation d'équiprobabilité. Soit A l'évènement : « on obtient un nombre impair », puisque 8 jetons sur 10 portent un numéro impair, la probabilité de A est :

$$P(A) = \frac{8}{10} = 0,8$$

Remarque : Les expressions comme « indiscernables au toucher », « dé équilibré », « pièce équilibrée » sont des indicateurs de situations d'équiprobabilité.

Propriété : Soit A et B deux évènements d'un univers Ω .

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,
- $P(\emptyset) = 0$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple : On lance un dé à 6 faces. On considère les évènements :

- A : « Obtenir un nombre pair »,
- B : « Obtenir un multiple de 3 ».

$A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{3; 6\}$.

Alors $A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$ et $A \cap B = \{6\}$.

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Propriété : Si A et B sont deux évènements incompatibles de l'univers Ω , alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

III Dénombrement.

Lorsqu'une expérience est constituée de plusieurs épreuves, on peut utiliser un tableau ou un arbre pour dénombrer les issues possibles de l'expérience aléatoire.

III.1 Dénombrer avec un tableau.

Pour dénombrer les issues d'une expérience à deux épreuves A et B, on peut construire un tableau à double entrée où :

- la première colonne décrit les issues de l'épreuve A ;
- la première ligne décrit les issues de l'épreuve B.

A l'intersection de chaque ligne et de chaque colonne, on inscrit les résultats faisant intervenir les issues de A et de B.

	B_1	B_2	B_3	...
A_1	(A_1, B_1)	(A_1, B_2)	(A_1, B_3)	
A_2	(A_2, B_1)	(A_2, B_2)	(A_2, B_3)	
...				

Exemple : Une urne rouge contient six boules numérotés de 1 à 6. Une urne verte contient quatre boules numérotés de 1 à 4.

On tire une boule dans chacune des urnes et on s'intéresse au produit des nombres obtenus.

Pour déterminer les issues possibles de cette expérience, on peut construire un tableau à double entrée :

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24

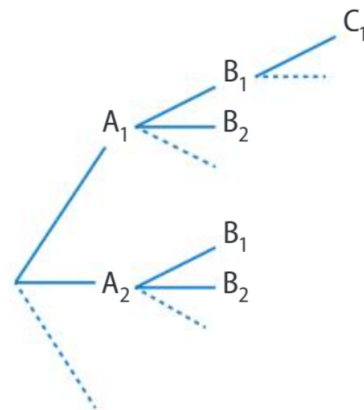
Le choix des boules dans les deux urnes est équiprobable. Il y a trois possibilités d'obtenir

l'issue 4 sur un nombre total d'issues égal à 24. La probabilité de l'évènement A : « Obtenir 4 » vaut donc $P(A) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

III.2 Dénombrer avec un arbre.

Un arbre permet de dénombrer les issues d'une expérience aléatoire comportant deux épreuves ou plus.

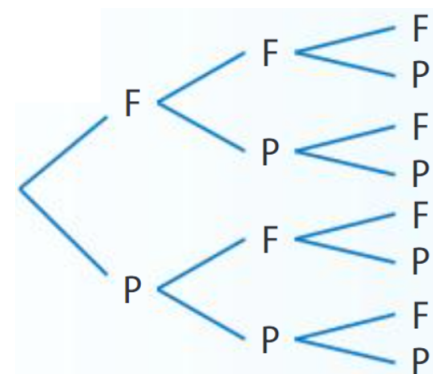
- Au premier niveau, la première série de branches indique les issues possibles de la première épreuve.
- Au deuxième niveau, une autre série de branches indique les issues possibles de la deuxième épreuve.
- Et ainsi de suite selon le nombre d'épreuves de l'expérience aléatoire.



Exemple : On lance une pièce de monnaie équilibrée et on note à chaque lancer le côté de la pièce obtenu. Le résultat de cette expérience est une liste de trois lettres. Par exemple, lorsqu'on a obtenu PILE aux deux premiers lancers et FACE au troisième lancer, on note PPF.

Pour déterminer toutes les issues possibles de cette expérience, on peut construire un arbre à trois niveaux.

Les issues possibles sont donc FFF ; FFP ; FPF ; FPP ; PFF ; PFP ; PPF ; PPP.



Considérons l'évènement A : « Obtenir exactement deux fois PILE ». Les issues qui réalisent l'évènement A sont FPP, PFP et PPF.

Comme la pièce n'est pas truquée, on est en situation d'équiprobabilité donc $P(A) = \frac{3}{8}$.