

Chapitre 4 : Généralités sur les fonctions.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme

Durée : 2 semaines

Thème : Fonctions.

Contenu :

- Fonctions à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- Courbe représentative : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $y = f(x)$.
- Fonction paire, impaire, traduction géométrique.

Capacités attendues.

- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- Résoudre graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou une inéquation du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.
- Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple $U = RI$, $d = vt$, $S = \pi r^2$), exprimer une variable en fonction d'une autre. Cas d'une relation du premier degré $ax + by = c$.

1 Notion de fonction.

1.1 Définition.

Définition : Soit I un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$. Définir une fonction f sur I consiste à associer à chaque réel $x \in I$ un unique réel y appelé image de x .

Pour signifier que y est le réel associé à x par la fonction f , on note $y = f(x)$.

On note cette correspondance :

$$\begin{aligned} f &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

I est l'ensemble de définition de la fonction f , que l'on note plus généralement D_f .

Exemple : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-2; 2]$ par $f(x) = x^2 + 3$.

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7.$$

On dit que 7 est l'image de -2 par la fonction f .

On dit aussi que -2 est **un** antécédent de 7 par la fonction f .

Remarque :

- Une fonction traduit une relation de dépendance entre une variable (notée x , t , q ...) et une autre grandeur (son image), qui peut s'exprimer « en fonction » de cette variable.



- On parle de la fonction « f » et non pas de la fonction « $f(x)$ » : $f(x)$ est un nombre, c'est l'image de x par la fonction f .
- On peut nommer une fonction par une autre lettre que f , par exemple g , a , u , v ...
- S'il n'est pas donné, l'ensemble de définition d'une fonction peut être obtenu par analyse de son expression (en cherchant par exemple des valeurs que x ne peut pas prendre), par analyse du contexte lié à cette fonction (comme par exemple des distances).

Objectifs : Déterminer l'image d'un nombre par une fonction.

Déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction.

Exercices 23 à 26 page 200.

Exercice 27 page 200.

Exercices 66 à 68 page 203.

Objectifs : Exprimer une variable en fonction d'une autre.

Exercices 97, 98, 101 page 105.

Exercices 99, 100, 102 page 105.

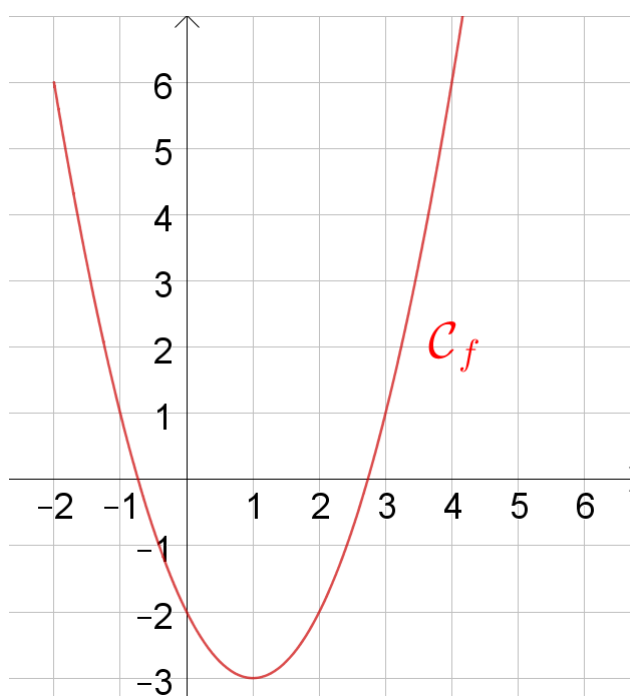
1.2 Représentation graphique d'une fonction.

Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f . Dans un repère du plan, on appelle **courbe d'équation $y=f(x)$** , et on la note $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$ quand x parcourt D_f .

Exemple : Considérons la fonction ci-dessous :

$$\begin{aligned} f &: [-2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 2x - 2 \end{aligned}$$

Dans un repère orthonormé du plan, sa courbe représentative est :



Propriété : Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et a et b deux réels.

$M(a, b)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $b = f(a)$.

Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
Exercices 28, 29 page 200.
Exercices 31 à 33 page 201.
Exercices 34 à 37 page 201.

1.3 Tableau de valeurs.

Définition : Soit f une fonction, D_f son ensemble de définition et x un élément de D_f .

Un tableau de valeurs de la fonction f est un tableau qui regroupe différentes valeurs de x , et les images $f(x)$ associées.

Exemple : Un tableau de valeurs pour la fonction $f : x \mapsto 3x + 5$ est par exemple :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	-1	2	5	8	11	14

Objectif : Compléter / utiliser un tableau de valeurs d'une fonction.
Exercices 64, 69, 71 page 203.
Exercices 34 à 37 page 201.

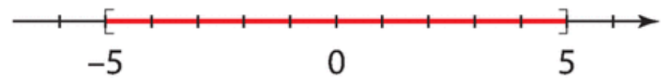
Objectif : Modéliser par des fonctions des situations.
Exercices 73 et 82 page 204.
Exercices 61, 62 page 203.
Exercices 94 à 97 page 207.

2 Parité d'une fonction.

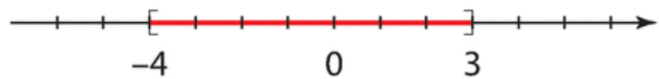
2.1 Ensemble symétrique par rapport à 0.

Définition : Un ensemble D de $\mathbb{R}$ est dit symétrique par rapport à 0 si, pour tout nombre de l'ensemble D , son opposé appartient à l'ensemble D .

Exemple : L'intervalle $[-5; 5]$ est symétrique par rapport à 0.



L'intervalle $[-4; 3]$ n'est pas symétrique par rapport à 0.



En effet, si l'on considère par exemple le nombre -4 de l'intervalle, alors son opposé 4 n'appartient pas à l'intervalle.

2.2 Fonction paire et fonction impaire.

Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à 0. On dit que :

- f est paire si $\forall x \in I, f(x) = f(-x)$.
- f est impaire si $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est une fonction paire.

En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

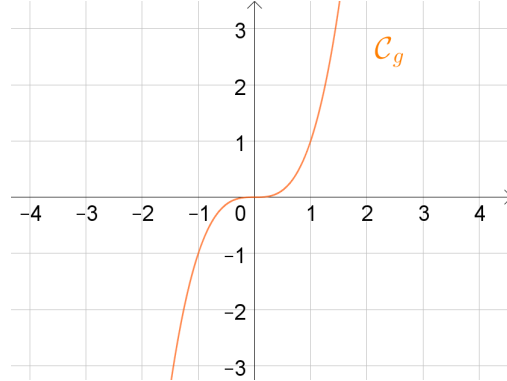
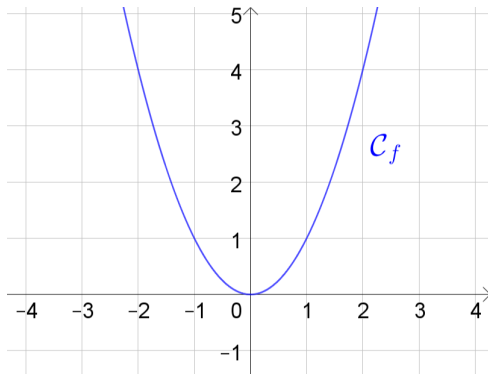
La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$ est une fonction impaire.

En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = (-x^3) = (-1)^3 \times x^3 = -x^3 = -g(x)$.

Propriété : Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à 0. Dans un repère orthogonal :

- f est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.
- f est impaire si et seulement si l'origine du repère est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exemple : Reprenons les fonctions de l'exemple précédent. Leur courbe représentative respective est :



Objectif : Étudier des fonctions paires et impaires.

Exercice 44 page 202.

Exercice 108 page 209.

Exercice 107 page 209.

Activité 3.

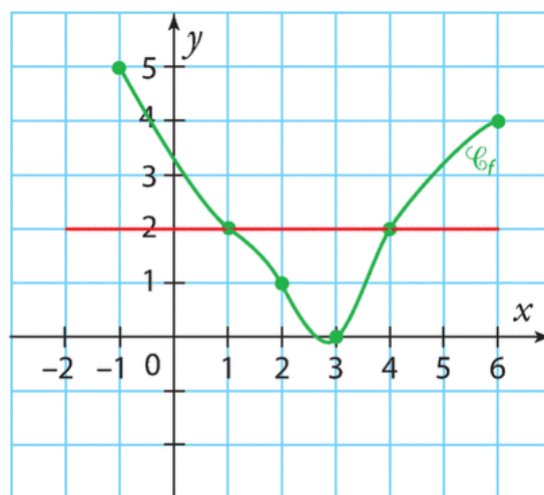
3 Résolution graphique d'équations et d'inéquations.

On peut résoudre de manière approchée une équation ou une inéquation en utilisant la courbe représentative d'une fonction.

Exemple : Considérons la fonction f définie sur $[-1; 6]$ et dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont 1 et 4 : elles correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = 2$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 2$ est $S = [1; 4]$: ce sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 2.



Objectif : Résoudre graphiquement des équations et des inéquations.

Résoudre algébriquement des équations.

Exercices 38, 39, 41, 42 page 201.

Exercice 88 page 205.

Exercices 40 page 201 et 43 page 202.

Exercices 83, 86, 87 page 205.

Exercices 89 à 91 page 206.