

Chapitre 2 : Ensembles de nombres.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme

Thème : Nombres et calculs.

Contenu :

- Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, droite numérique.
- Intervalle de $\mathbb{R}$, notations $+\infty$, $-\infty$
- Notation $|a|$, distance entre deux nombres réels
- Représentation de l'intervalle $[a-r, a+r]$ puis caractérisation par la condition $|x - a| \leq r$
- Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux
- Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ; nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π .

Capacités attendues.

- Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.
- Donner un encadrement d'amplitude donnée d'un nombre réel par des décimaux.
- Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

Commentaires.

- Les élèves rencontrent les nombres réels comme abscisses des points d'une droite graduée et plus largement comme nombres permettant de mesurer des grandeurs. Ils les comparent, ils apprennent qu'il existe des nombres rationnels, les encadrent par des nombres décimaux ou rationnels.
- Ils comprennent que calculatrice et logiciels font des calculs approchés.

1 Nombres entiers, décimaux et rationnels.

Définition 1 : On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.

Ainsi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Définitions 2 :

- Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.
- Un nombre décimal est un nombre rationnel qui peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Remarque : Les nombres entiers relatifs sont des nombres décimaux : pour $a \in \mathbb{Z}$, $a = \frac{a}{10^0}$.

Or par définition, les nombres décimaux sont des nombres rationnels : on a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{lll} \text{Exemples : } \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} & \frac{14}{-21} \in \mathbb{Q} & \frac{-2,5}{0,7} \in \mathbb{Q} \text{ car } \frac{2,5}{0,7} = \frac{25}{7}. \\ 0,5 \in \mathbb{D} \text{ car } 0,5 = \frac{5}{10} & -\frac{3}{25} \in \mathbb{D} \text{ car } -\frac{3}{25} = -\frac{12}{100}. & \end{array}$$

Propriétés 3 (à démontrer) : Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Propriété 4 : Un nombre rationnel admet un développement décimal périodique à partir d'un certain rang.

$$\text{Exemples : } \frac{1}{3} = 0,33333\dots \qquad \frac{13193}{49950} = 0.26412412412\dots$$

Propriété 5 : Un nombre est décimal si et seulement si il peut s'écrire $\frac{a}{2^m \times 5^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$.

Exemples : $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$

$$-\frac{3}{25} \in \mathbb{D} \text{ car } -\frac{3}{25} = -\frac{3}{5^5}.$$

Remarque : Un nombre décimal admet un développement décimal avec un nombre fini de chiffres. Pour savoir si un nombre est ou n'est pas décimal, on le met sous la forme d'une fraction irréductible et on regarde si le dénominateur ne possède que des puissances de 2 ou de 5.

Exemple : On cherche à savoir si $\frac{8}{6}$ est un nombre décimal.

On commence par mettre la fraction sous forme irréductible : $\frac{8}{6} = \frac{4 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{3}$: le dénominateur n'est pas de la forme $2^m \times 5^p$ donc ce n'est pas un nombre décimal.

Objectif : manipuler les nombres entiers, décimaux, rationnels.
Exercices fiche A : 1, 2, 4, 6, 7, 9, 12, 14
Exercices fiche A : 3, 5, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 17

2 Nombres réels.

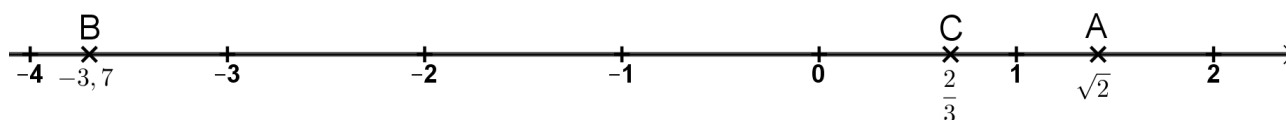
2.1 Définition.

Définition 6 : L'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée est appelé ensemble des nombres réels, note $\mathbb{R}$. Cette droite se nomme droite des réels ou droite numérique.

Exemple : $\sqrt{2}$ est un nombre réel, il correspond à la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. Sur la droite graduée ci-dessous, c'est l'abscisse du point A : on note $A(\sqrt{2})$.

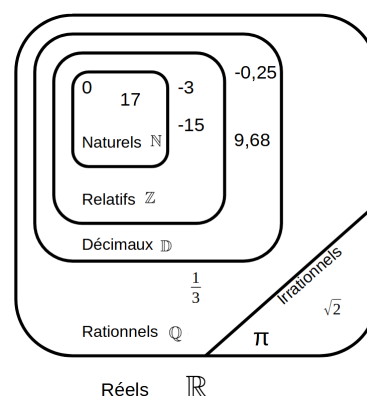
De même, $\frac{2}{3}$ et $-3,7$ sont des nombres réels.

On peut aussi citer le réel π , qui correspond à la circonférence d'un cercle de diamètre 1.



Remarque : Les nombres rationnels sont des nombres réels, on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres réels est constitué des nombres rationnels et irrationnels.



Notation : On note $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} - \{0\}$ l'ensemble des nombres réels privé de 0.

On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs.

On note $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres réels négatifs.

2.2 Nombres irrationnels.

Propriété 7 (à démontrer) : Le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Définition 8 : Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

Exemple : Comme l'indique la propriété précédente, $\sqrt{2}$ est irrationnel. C'est aussi le cas du nombre π ou $\sqrt{3}$.

Remarque : Rien que des zones numériques.

Objectifs : manipuler les nombres réels et irrationnels. Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
Exercices fiche B : 18, 19, 21, 24, 28
Exercices fiche B : 20 22, 23, 25, 26, 27

3 Intervalle de $\mathbb{R}$ et distance entre deux réels.

3.1 Intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 9 : Soit a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.

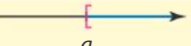
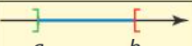
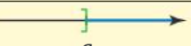
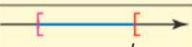
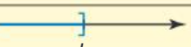
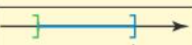
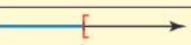
- L'intervalle $[a, b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.

Il est représenté sur la droite des réels par un segment dont les extrémités sont les points d'abscisses a et b . Son amplitude est $b - a$.

- L'intervalle $]a; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$.

Il est représenté sur la droite des réels par une demi-droite dont l'origine est le point d'abscisses a . La notation ∞ signifie « infini ».

- Pour exclure une borne de l'intervalle, on utilise un crochet tourné vers l'extérieur.

Ensemble des réels x tels que	Représentation graphique	Notation		Ensemble des réels x tels que	Représentation graphique	Notation
$a \leq x \leq b$		$[a; b]$		$a \leq x$		$[a; +\infty[$
$a < x < b$		$]a; b[$		$a < x$		$]a; +\infty[$
$a \leq x < b$		$[a; b[$		$x \leq b$		$] - \infty; b]$
$a < x \leq b$		$]a; b]$		$x < b$		$] - \infty; b[$

Exemple : L'intervalle $[1; 3[$ est l'ensemble de tous les nombres réels compris entre 1 et 3 (1 inclus et 3 exclus). L'amplitude de cet intervalle est égal à 2.

L'intervalle $] - \infty; -2]$ est l'ensemble de tous les nombres réels strictement inférieurs à -2.

Remarque :

- On définit de la même manière les intervalles $]a; b]$, $]a; b[$, $[a; b[$, $[a; +\infty[$, $] - \infty; b]$ et $] - \infty; b[$.
- Le sens des crochets indique si x peut être égal aux valeurs des bornes de l'intervalle. On peut se représenter les crochets comme des mains qui contiennent ou non les valeurs des bornes et indiquent de quel côté elle se situe.



Objectif : Représenter un intervalle de la droite numérique.

Exercices 30 à 33 page 78.

Exercice 36 page 78.

Exercices 37, 38 page 78.

Exercices 29 à 34 fiche C.

Exercice 36 fiche C.

Objectif : Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.

Exercices 34, 36 page 78

Exercices 35 page 78.

Exercice 35 fiche C.

3.2 Distance entre deux nombres réels.

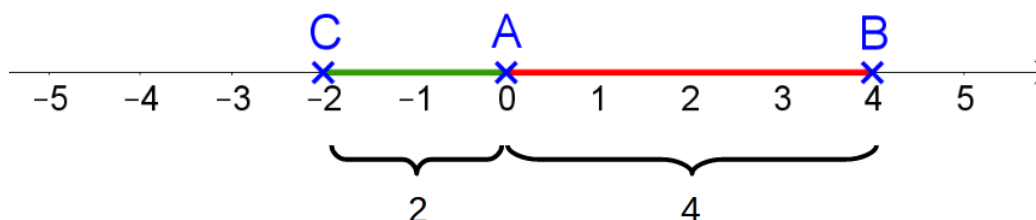
Définition 10 : On appelle valeur absolue d'un nombre réel x , notée $|x|$, la distance entre x et 0 sur la droite numérique.

La distance entre deux réels a et b est le nombre $|a - b|$.

Exemple : $|4| = 4$

$|3 - 5| = |-2| = 2$

$|0| = 0$.



Propriété 11 : Soit x un nombre réel. On a :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple : $|8, 14| = 8, 14$ $|-154, 18| = 154, 18$.

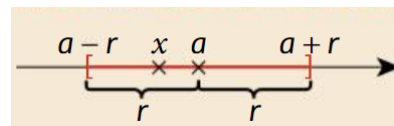
Remarque : Soient a et b deux réels, on déduit de la propriété précédent que :

$$|a - b| = \begin{cases} a - b & \text{si } a \geq b \\ b - a & \text{si } a \leq b \end{cases}$$

Soit x un nombre réel, $|x| = |-x|$: en effet, la distance entre x et 0 est la même qu'entre $-x$ et 0.

Propriété 12 : Soient a et r deux nombres réels ($r > 0$).

$|x - a| \leq r$ si et seulement si $x \in [a - r; a + r]$.



Exemple : $x \in [-2; 4]$ si et seulement si $x \in [1 - 3; 1 + 3]$ si et seulement si $|x - 1| \leq 3$.

Objectif : Calculer la distance entre deux nombres réels.
Exercices 37, 38, 40 fiche D
Exercices 39, 41 fiche D.

3.3 Encadrer un nombre réel entre deux décimaux.

Définition 13 : Donner un encadrement décimal d'un réel x , c'est donner deux nombres décimaux a et b tels que $a \leq x \leq b$.

$b - a$ est l'amplitude de l'encadrement.

L'encadrement est à 10^{-n} près ($n \in \mathbb{N}$) si son amplitude est égale à 10^{-n} .

Exemple : L'encadrement décimal de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près est : $1,414 \leq \sqrt{2} < 1,415$.



Objectif : Donner un encadrement d'amplitude donnée d'un nombre réel par des décimaux.
Exercices 42, 43 fiche E
Exercices supplémentaire fiche F.