

Chapitre 15 : Arithmétique.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Thème : Nombres et calculs.

Contenus.

- Définition des notions de multiples, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair.

Capacités attendues.

- Modéliser et résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair, de nombre premier.
- Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.

Démonstrations.

- Pour une valeur numérique a , la somme de deux multiples de a est multiple de a .
- La carré d'un nombre impair est impair.

Exemples d'algorithme.

- Déterminer si un entier naturel a est multiple d'un entier naturel b .
- Pour des entiers a et b donnés, déterminer le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b .
- Déterminer si un entier naturel est premier.

I Multiples et diviseurs.

Définition : Soient a et b deux nombres entiers relatifs. On dit que a est un multiple de b si il existe un entier relatif k tel que $a = b \times k$.

On dit alors aussi que :

- a est divisible par b ,
- b divise a ,
- b est un diviseur de a .

Exemple : -3 est un diviseur de -36 car $-36 = -3 \times 12$.

17 n'est pas un multiple de 2 car il n'existe pas d'entier k tel que $17 = k \times 2$. En effet, $2k = 17$ implique $k = 8,5$ et $8,5$ n'est pas un nombre entier.

0 est multiple de n'importe quel entier relatif b car $0 = 0 \times b$ et tout entier relatif a est multiple de 1 car $a = a \times 1$.

Propriété : Soit a un nombre entier relatif. La somme de deux multiples de a est un multiple de a .

Exemple : Prenons $a = 7$. Alors 14 et 21 sont deux multiples de a .

$14 + 21 = 35$ et $35 = 5 \times 7$ donc 35 est bien un multiple de a .

Démonstration. On démontrera cette propriété en donnant à a une valeur numérique, comme l'exige le programme. Prenons $a = 5$.

Soient b et c deux multiples de 5 . Alors il existe deux entiers k et k' tels que $b = 5k$ et $c = 5k'$.

Donc $b + c = 5k + 5k' = 5(k + k') = 5q$ en posant $q = k + k'$.

q est un entier car il est la somme de deux entiers, donc $b + c$ est un multiple de 5 par définition. □

II Nombres pairs, nombres impairs.

Définition : Soit $a \in \mathbb{Z}$. On dit que a est un nombre :

- pair si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2 \times k$;
- impair si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2 \times k + 1$.

Remarque : Autrement dit, un nombre pair est un nombre qui est divisible par 2.

Un nombre impair est un nombre qui n'est pas pair.

Exemple : $17 = 8 \times 2 + 1$ est un nombre impair.

$38 = 2 \times 19$ est un nombre pair.

Propriété : Le carré d'un nombre impair est impair.

Exemple : $7^2 = 49$ est un nombre impair.

Démonstration. Soit a un nombre impair. Il s'écrit donc $a = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q + 1 \text{ avec } q = 2k^2 + 2k.$$

q est un entier car il est la somme de deux entiers, donc par définition, a^2 est impair. □

III Nombres premiers.

Définition : Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs distincts dans $\mathbb{N}$: 1 et lui-même.

Exemple : 2 ; 3 ; 5 et 7 sont des nombres premiers.

1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Remarque : 2 est le seul nombre pair premier.

Propriété : Tout entier naturel au moins égal à 2 est premier ou produit de nombres premiers. Cette décomposition en produits de facteurs premiers est unique.

Exemple : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Les facteurs premiers de 360 sont 2, 3 et 5.

Remarque : La décomposition en produit de facteurs premiers est utile pour mettre une fraction sous forme irréductible.

Exemple : $\frac{48}{126} = \frac{2^4 \times 3}{2 \times 3^2 \times 7} = \frac{2^3}{3 \times 7} = \frac{8}{21}$