

Chapitre 14 : Equations de droites.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Thème : Géométrie.

Contenus.

- Vecteur directeur d'une droite.
- Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite.
- Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Capacités attendues.

- Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur ou un point et la pente.
- Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.
- Tracer une droite connaissant son équation réduite ou cartésienne.
- Établir que trois points sont alignés ou non.
- Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes. Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Démonstration : En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

Exemples d'algorithmes :

- Étudier l'alignement de trois points dans le plan.
- Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés.

Approfondissements possibles :

- Ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses.
- Représentation, sur des exemples, de parties décrites par des inégalités sur les coordonnées.

Activité A page 216 livre scolaire.

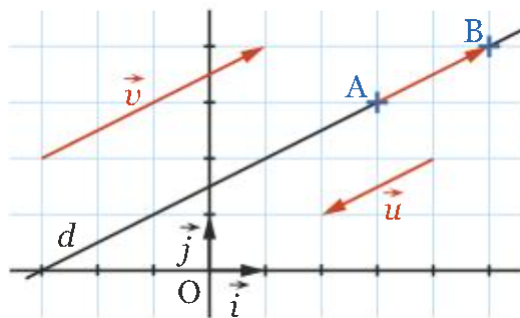
Dans ce chapitre, on se placera dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I Vecteurs directeurs et équations cartésiennes.

I.1 Vecteur directeur d'une droite.

Définition : Soient A et B deux points distincts d'une droite d , alors tout vecteur $\vec{u}$ non nul et colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de la droite d .

Exemple : Dans le plan ci-dessous, les vecteurs $\overrightarrow{AB}(2; 1)$, $\vec{u}(-2; -1)$ et $\vec{v}(4; 2)$ sont des vecteurs directeurs de la droite d . En effet, ils sont non nuls et vérifient les relations : $\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{v}$.



Remarque : Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs.

I.2 Équation cartésienne de droite.

Théorème : Dans un repère orthonormé, les coordonnées de l'ensemble des points $M(x; y)$ d'une droite vérifient une relation $ax + by + c = 0$, où a , b et c sont des nombres réels.

Démonstration. Soient $P(x_P; y_P)$ et $Q(x_Q; y_Q)$ deux points de (d) . Alors, pour tout point $M(x; y)$ appartenant à (d) :

$\overrightarrow{PM}(x - x_P; y - y_P)$ et $\overrightarrow{PQ}(x_Q - x_P; y_Q - y_P)$ sont colinéaires.

On a donc $\det(\overrightarrow{PM}; \overrightarrow{PQ}) = 0$,

c'est-à-dire $(x - x_P)(y_Q - y_P) - (y - y_P)(x_Q - x_P) = 0$.

Donc $x(y_Q - y_P) - x_P(y_Q - y_P) - y(x_Q - x_P) + y_P(x_Q - x_P) = 0$.

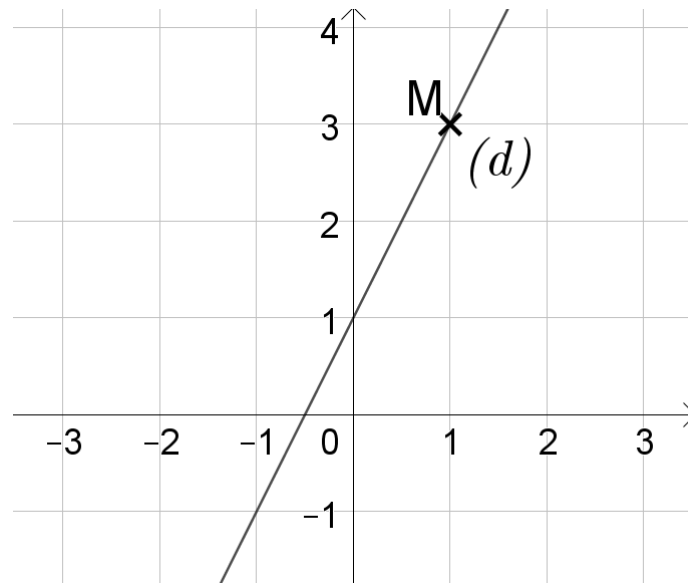
Donc $(y_Q - y_P)x + (x_P - x_Q)y + (y_P x_Q - x_P y_Q) = 0$.

En posant $a = y_Q - y_P$, $b = x_P - x_Q$ et $c = y_P x_Q - x_P y_Q$, on obtient $ax + by + c = 0$. $\square$

Définition : La relation $ax + by + c = 0$ s'appelle équation cartésienne de la droite d .

Exemple : Dans le repère orthonormé ci-dessous, considérons la droite (d) dont on donne l'équation cartésienne $-2x + y - 1 = 0$.

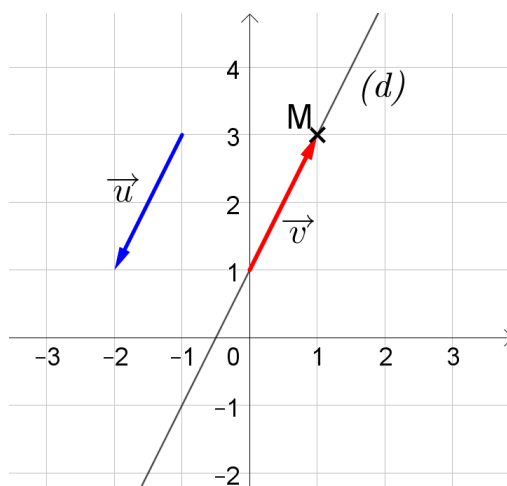
Les coordonnées du point $M(1; 3)$ vérifient l'équation cartésienne : $-2 \times 1 + 3 - 1 = 0$.



Propriété : Le vecteur $(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Exemple : En reprenant l'exemple précédent, d'après l'équation cartésienne, on a $a = -2$ et $b = 1$. Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}(-1; -2)$.

D'après le graphique, un autre vecteur directeur est $\vec{v}(1; 2)$. Ces deux vecteurs sont tous les deux des vecteurs directeurs de la droite (d) , ils sont colinéaires : $\vec{u} = -\vec{v}$.

**Remarque :**

- Tout comme il existe une infinité de vecteurs directeurs pour une droite, il existe aussi une infinité d'équations cartésiennes.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $y = -\frac{c}{b}$ et la droite est parallèle à l'axe des abscisses.
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$, alors $x = -\frac{c}{a}$ et la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Objectif : Déterminer un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.

Communs : Exercices 1, 2 fiche.

Pour les plus rapides : Exercice 3 fiche.

Objectif : Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur.

Communs : Exercices 32, 33, 34, 35, 36, 37 page 174.

Pour les plus rapides : Exercices 48, 49, 50, 51 page 175.

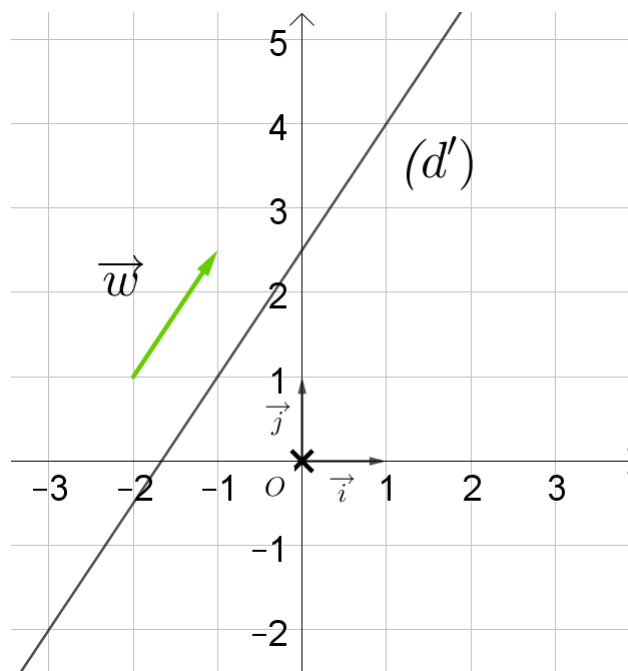
II Coefficient directeur et équation réduite.

II.1 Coefficient directeur d'une droite.

Théorème : Une droite d d'équation $ax + by + c = 0$ où $b \neq 0$ possède un vecteur directeur de coordonnées $(1; m)$ avec $m = -\frac{a}{b}$.

Exemple : Dans le plan ci-contre, on considère la droite (d') dont on donne une équation cartésienne : $-3x + 2y - 5 = 0$.

$a = -3$ et $b = 2$ donc $-\frac{a}{b} = 1,5$. Un vecteur directeur est $\vec{w}(1; 1,5)$.



Définition : Le nombre m s'appelle **coefficient directeur** de la droite d .

Remarque : Si $b = 0$, alors la droite (d) est parallèle à l'axe des ordonnées : dans ce cas, elle n'admet pas de coefficient directeur m .

Objectif : Déterminer la pente d'une droite donnée par une équation cartésienne ou une représentation graphique.

Communs : Exercices 41, 42 page 175, exercice 4 fiche.

II.2 Équation réduite d'une droite.

Théorème : Soit une droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées, de coefficient directeur m . Il existe un unique nombre p tel que l'équation de la droite (d) s'écrit $y = mx + p$.

Définition : L'équation $y = mx + p$ s'appelle **l'équation réduite** de la droite (d).

Exemple : Reprenons la droite (d') de l'exemple précédent, dont on donnait une équation cartésienne $-3x + 2y - 5 = 0$.

$$\begin{aligned}-3x + 2y - 5 = 0 &\iff 2y = 3x + 5 \\ &\iff y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \\ &\iff y = 1,5x + 2,5\end{aligned}$$

L'équation réduite de la droite (d') est donc $y = 1,5x + 2,5$.

Remarque :

- Contrairement aux équations cartésiennes, l'équation réduite d'une droite est unique. On ne dira donc pas une équation réduite mais bien l'équation réduite.
- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une unique équation de la forme $x = c$: elle n'a ni coefficient directeur, ni ordonnée à l'origine.

Propriété : Soient A et B deux points distincts du plan. Le coefficient directeur d'une droite (AB) non parallèle à l'axe des ordonnées est égal à $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemple : Le coefficient directeur de la droite passant par les points $A(1; 3)$ et $B(4; -1)$ vaut :

$$m = \frac{-1-3}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

Objectif : Déterminer la pente d'une droite donnée par une équation réduite.

Communs : Exercice 5 fiche.

Objectif : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et de la pente.

Communs : Exercices 6 fiche.

Objectif : Tracer une droite connaissant son équation réduite ou cartésienne.

Communs : Exercices 27, 28 page 174, 38, 39 page 175.

Pour les plus rapides : Exercice 29, 30, 31 page 174, 40 page 175.

III Positions relatives de droites.

III.1 Systèmes d'équations.

Définition : Un système de deux équations linéaires à deux inconnues est la donnée de deux équations d'inconnues x et y de la forme ci-contre :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Une solution de ce système est un couple $(x; y)$ qui vérifie simultanément ces deux équations.

Résoudre ce système, c'est trouver tous ses couples solutions.

Exemple : Considérons le système (S) ci-contre :

$$(S) \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

Le couple $(1; 3)$ n'est pas solution de ce système (S) car :

- $1 + 3 - 4 = 0$ donc le couple $(1; 3)$ est solution de la première équation.
- $2 \times 1 - 3 - 5 = -6 \neq 0$ donc le couple $(1; 3)$ ne vérifie pas la deuxième équation.

Le couple $(3; 1)$ est une solution du système (S). En effet :

- $3 + 1 - 4 = 0$ donc le couple $(3; 1)$ vérifie la première équation.
- $2 \times 3 - 1 - 5 = 0$ donc le couple $(3; 1)$ vérifie la deuxième équation.

III.2 Interprétation graphique.

Résoudre un système revient à chercher les coordonnées du point d'intersection des droites dont les équations sont celles du système, quand il existe.

On suppose que $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a'; b') \neq (0; 0)$ et on s'intéresse au système ci-dessous :

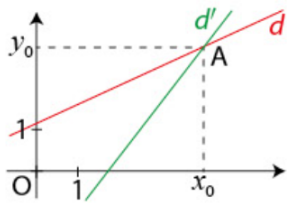
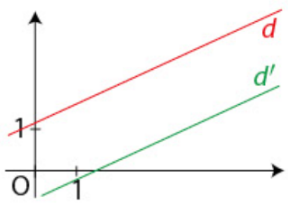
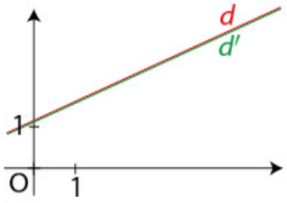
$$(S) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Dans un repère orthonormé, $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne d'une droite (d) et $a'x + b'y + c = 0$ est une équation cartésienne d'une droite (d') .

Résoudre ce système, c'est déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de ces deux droites.

$\vec{u}(-b; a)$ et $\vec{v}(-b'; a')$ sont les vecteurs directeurs respectifs de (d) et (d') .

Le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $ab' - a'b$. Il y a alors trois cas possibles pour l'ensemble $\mathcal{S}$ des couples solutions du système (S) :

$ab' - a'b \neq 0$	$ab' - a'b = 0$	
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.	
		
d et d' sont sécantes en un point $A(x_0; y_0)$.	d et d' sont strictement parallèles.	d et d' sont confondues.
Le système (S) a un seul couple solution : $(x_0; y_0)$. $\mathcal{S} = \{(x_0; y_0)\}$	Le système (S) n'a pas de couple solution. $\mathcal{S} = \emptyset$	Le système (S) a une infinité de couples solutions. $\mathcal{S} = \left\{ \left(x; -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \right) \right\}$ (avec $x \in \mathbb{R}$)

III.3 Méthode de résolution d'un système.

Nous allons utiliser la méthode par substitution, qui consiste à isoler une inconnue à partir d'une équation, et à la remplacer dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.

On résout alors cette nouvelle équation, puis on remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.

Exemple : Nous allons résoudre le système (S)
$$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ 3x - 5y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x + y + 3 &= 0 \\ 3x - 5y - 2 &= 0 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} y &= 2x - 3 \\ 3x - 5y - 2 &= 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} y &= 2x - 3 \\ 3x - 5(2x - 3) - 2 &= 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} y &= 2x - 3 \\ x &= \frac{13}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} y &= 2 \times \frac{13}{7} - 3 \\ x &= \frac{13}{7} \end{cases}$$

Donc la solution du système est le couple $(\frac{13}{7}; \frac{5}{7})$.

Objectif : Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Communs : Exercices 56, 57, 58, 59, 60, 61 page 176.

Objectif : Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.

Communs : Exercices 52, 53, 54, 55 page 176.