

# Chapitre 12 : Vecteurs, colinéarité.

Eliot ROY

2022-2023

## Points du programme.

**Thème :** Géométrie.

**Contenus.**

- Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs.
- Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.
- Calculer les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel.

**Capacités attendues.**

- Caractériser l'alignement et le parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
- Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

**Démonstration :** Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

## Activité 1 sur geogebra.

# I Colinéarité de vecteurs.

## I.1 Produit d'un vecteur par réel.

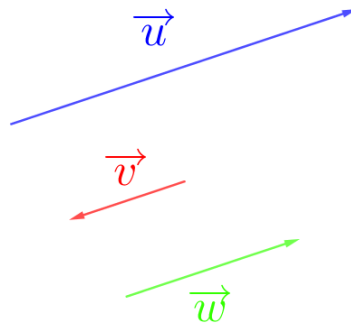
**Définition 1 :** Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul et  $k$  un nombre réel non nul.

$k\vec{u}$  est le vecteur défini par :

- sa direction : la même que celle de  $\vec{u}$ .
- son sens :
  - si  $k > 0$ ,  $k\vec{u}$  a le même sens que  $\vec{u}$
  - si  $k < 0$ ,  $k\vec{u}$  et  $\vec{u}$  ont des sens contraires.
- sa norme :  $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$ .

**Remarque :** Si  $k = 0$  ou si  $\vec{u} = \vec{0}$ , alors  $k\vec{u} = \vec{0}$ .

*Exemple :* A partir du vecteur  $\vec{u}$ , on a représenté les deux vecteurs  $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{u}$  et  $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u}$ .



**Propriété 2 :** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs, et  $k$  et  $k'$  deux nombres réels :

- $1\vec{u} = \vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0} \iff k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$

*Exemple :* Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs.

$$2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}.$$

$$2\vec{u} + 3\vec{u} = 5\vec{u}.$$

$$3(2\vec{u}) = 6\vec{u}.$$

**Objectif :** Représenter le produit d'un vecteur par un nombre réel.

**Communs :** Exercices 9, 10, 11, 12 page 146, 48 page 152.

**Pour les plus rapides :** Exercices 45, 46, 47 page 152, 77 page 154.

Activité 2 : n°5 page 137 (jusqu'à la question 4).

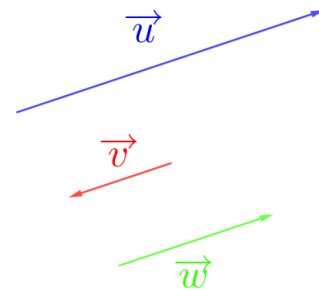
## I.2 Colinéarité.

**Définition 3 :** Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si il existe  $(a, b) \neq (0, 0)$  tels que  $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ .

**Théorème 4 :** Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  sont colinéaires si il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$ .

*Exemple :* Reprenons le premier exemple du cours.

D'après le théorème précédent, les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $-\frac{1}{2}\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires.



**Remarque :** Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs. En pratique, on utilisera le théorème plus que la définition.

**Objectif :** Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires.

**Communs :** Exercices 20 page 149, 81 page 154.

## Introduction orale.

Pour la suite de ce cours, on se placera dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

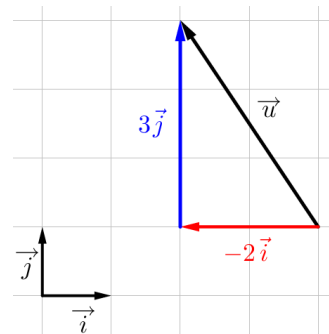
## II Propriétés avec les coordonnées.

### II.1 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel.

**Théorème 5 :** Tout vecteur  $\vec{u}$  du plan se décompose de manière unique sous la forme  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , où  $x$  et  $y$  sont deux nombres réels correspondant aux coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

*Exemple :* Dans le plan ci-contre muni de la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ , on a  $\vec{u}(-2; 3)$ .

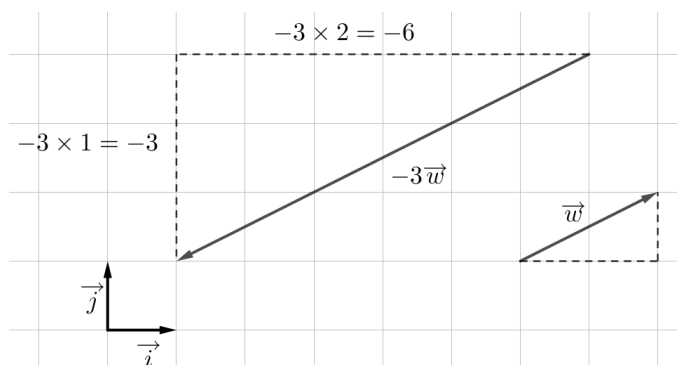
Autrement dit,  $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ .



**Propriété 6 :** Si on multiplie un vecteur  $\vec{u}(x; y)$  par un nombre réel  $k$ , alors ses coordonnées sont multipliées par  $k$  : on a  $k\vec{u}(kx; ky)$ .

*Exemple :* Dans le plan ci-dessous muni de la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ , considérons le vecteur  $\vec{w}(2, 1)$ .

Alors le vecteur  $-3\vec{w}$  a pour coordonnées  $(-3 \times 2; -3 \times 1)$ , c'est-à-dire  $-3\vec{w}(-6; -3)$ .



**Objectif :** Calculer les coordonnées du produit d'un vecteur par un réel.

**Communs :** Exercices 58 page 152, 59, 60 page 153.

**Pour les plus rapides :** Exercices 62, 66, 67 page 153, 90 page 155.

## II.2 Critère de colinéarité.

**Définition 7 :** Soient  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  deux vecteurs dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Le nombre  $xy' - x'y$  est appelé déterminant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ . On le note  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  ou aussi

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

.

*Exemple :* Considérons  $\vec{u}(10; -23)$  et  $\vec{v}(-6; 17)$  dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 10 \times 17 - (-23) \times (-6) = 170 - 138 = 32.$$

**Propriété 8 (à démontrer) :** Dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ , les vecteurs  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  sont colinéaires si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .

*Exemple :* Dans l'exemple précédent, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires.

**Objectif : Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires avec le déterminant.**

**Communs :** Exercices 21 page 149, 68 page 153.

**Pour les plus rapides :** Exercice 69 page 153.

## Activité n°3.

### III Applications au parallélisme et à l'alignement.

**Propriété 9 :** Soient  $A, B, C, D$  quatre points distincts du plan.

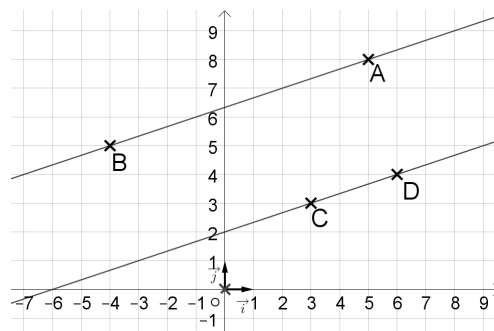
Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.

*Exemple :* Dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ci-dessous, on considère les points  $A(5; 8), B(-4; 5), C(3; 3)$  et  $D(6; 4)$ .

On a donc  $\overrightarrow{AB}(-9; -3)$  et  $\overrightarrow{CD}(3; 1)$ .

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -9 \times 1 - ((-3) \times 3) = -9 + 9 = 0.$$

Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont donc parallèles.



**Objectif :** Démontrer que deux droites sont parallèles.

**Communs :** Exercices 22, 24 page 149, 83 page 154.

**Pour les plus rapides :** Exercices 70, 73 page 153, 102 page 156, 108, 109 page 157.

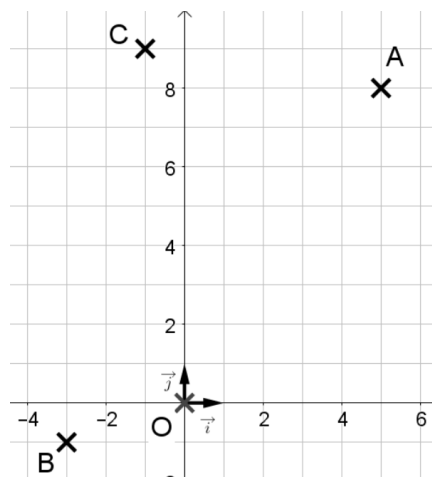
**Propriété 10 :** Trois points distincts  $A, B, C$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

*Exemple :* Soient  $A(5; 8), B(-3; -1)$  et  $C(-1; 9)$  trois points dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ci-contre.

On a  $\overrightarrow{AB}(-8; -9)$  et  $\overrightarrow{AC}(-6; 1)$ .

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -8 \times 1 - (-6 \times (-9)) = -62 \text{ donc}$$

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0$  : les points A, B et C ne sont donc pas alignés.



**Remarque :** Dans la propriété précédente, on peut substituer à la condition «  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires », l'une des conditions «  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont colinéaires », ou «  $\overrightarrow{CA}$  et  $\overrightarrow{CB}$  sont colinéaires ».

**Objectif :** Démontrer que trois points sont alignés.

**Communs :** Exercices 23 page 149, 71 page 153, 82 page 154, 91 page 155.

**Pour les plus rapides :** Exercices 72 page 153, 80 page 154, 97, 99, 104 page 156.

**Objectif :** Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

**Communs :** Exercice 110 page 157.

**Pour les plus rapides :** Exercice 101 page 156, 106 page 157.