

Chapitre 12 : Fonctions de référence.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Thème : Analyse.

Contenus.

- Fonction carré, inverse, racine carrée, cube : définitions et courbes représentatives.
- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.

Capacités attendues.

- Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f , comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.
- Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$.

Démonstration :

- Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ pour $x \geq 0$.
- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.

Approfondissement possible : Relier les courbes représentatives de la fonction carré et la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.

I Fonction carré, fonction racine carrée.

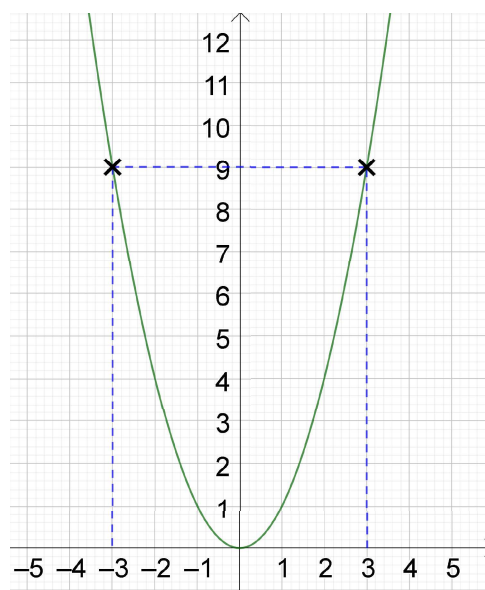
I.1 Fonction carré.

Définitions : La fonction carré est la fonction qui, à tout réel x , associe le réel x^2 . Sa courbe représentative est une parabole.

Exemple : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

$f(2) = 2^2 = 4$ donc 4 est l'image de 2 par la fonction carré.

$f(3) = 3^2 = 9$ et $f(-3) = (-3)^2 = 9$, donc 3 et -3 sont deux antécédents de 9 par la fonction carré.



Propriétés :

1. Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$.
2. La fonction carré est paire.
3. La fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$	0	$+\infty$

Démonstration. Nous allons démontrer que les variations de la fonction carré. Pour cette démonstration, on notera f la fonction carré.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Démontrons d'abord qu'elle est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$. Cela revient à démontrer que pour $a < b \leq 0$, on a $f(a) > f(b)$, c'est-à-dire $f(a) - f(b) > 0$, c'est-à-dire $(a - b)(a + b) > 0$.

Si $a < b \leq 0$, alors $a + b < 0$ et $a - b < 0$ donc $(a - b)(a + b) > 0$, autrement dit $f(a) - f(b) > 0$.

Nous venons donc de démontrer que f était strictement décroissante sur $] - \infty; 0]$.

Démontrons maintenant que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Il nous faut donc démontrer que pour $0 \leq a < b$, on a $f(a) < f(b)$, c'est-à-dire $f(a) - f(b) < 0$, c'est-à-dire $(a - b)(a + b) < 0$.

Si $0 \leq a < b$, alors $a - b < 0$ et $a + b > 0$ donc $(a - b)(a + b) < 0$, autrement dit $f(a) - f(b) < 0$.

Nous venons donc de démontrer que f était strictement croissante sur $[0; +\infty[$. $\square$

I.2 Fonction racine carrée.

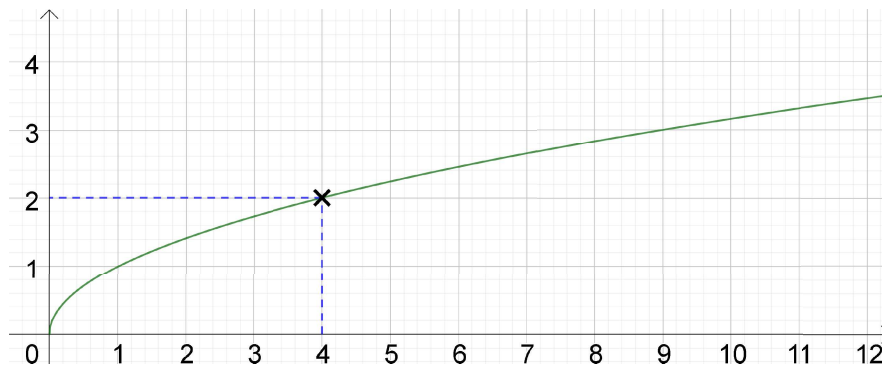
Définitions : Pour tout nombre réel **positif**, la racine carrée de x est le nombre positif, noté $\sqrt{x}$, tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

La fonction racine carrée est la fonction qui, à tout réel **positif** x , associe le réel $\sqrt{x}$.

Exemple : Considérons la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x}$.

$h(4) = \sqrt{4} = 2$ donc 2 est l'image de 4 par la fonction racine carrée.

$h(9) = \sqrt{9} = 3$ donc 9 est un antécédent de 3 par la fonction racine carrée.



Propriétés :

1. On a $\sqrt{0} = 0$ et pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$.
2. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
3. Pour tous réels positifs a et b , $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. De plus, si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+\infty$

Démonstration. Nous allons démontrer que la fonction racine carrée, définie sur $[0; +\infty[$, est strictement croissante. Cela revient donc à démontrer que pour $0 \leq a < b$, $f(a) < f(b)$, où f est la fonction racine carrée.

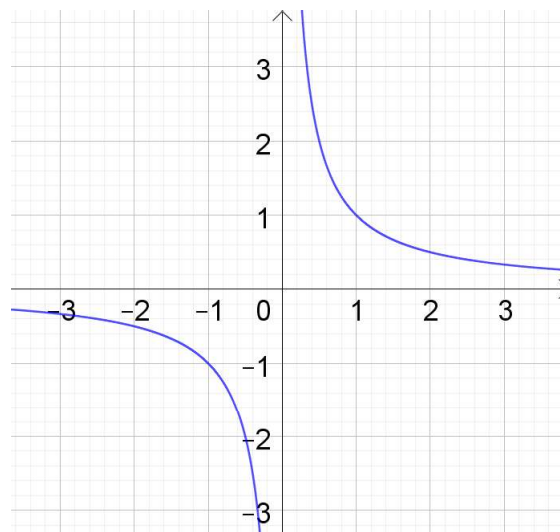
$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

$\sqrt{a} \geq 0$ et $\sqrt{b} > 0$ donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$. Comme $a < b$, on a $a - b < 0$ donc finalement $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < 0$, c'est-à-dire $f(a) - f(b) < 0$ donc $f(a) < f(b)$. Nous venons donc de démontrer que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. $\square$

II Fonction inverse, fonction cube.

II.1 Fonction inverse.

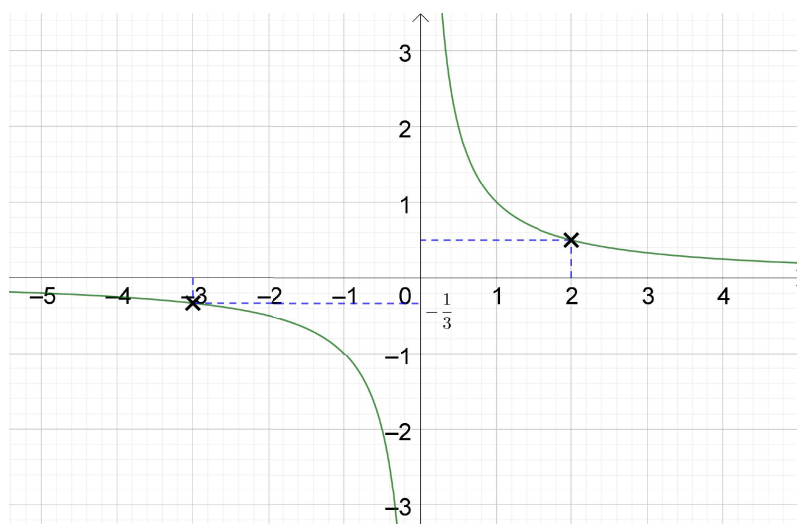
Définitions : La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ qui, à tout réel x différent de 0, associe son inverse $\frac{1}{x}$. Sa courbe représentative est une hyperbole.



Exemple : Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

$g(2) = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2}$ est l'image de 2 par la fonction inverse.

$g(-3) = -\frac{1}{3}$ donc -3 est un antécédent de $-\frac{1}{3}$ par la fonction inverse.



Propriétés : La fonction inverse :

1. est impaire ;
2. ne s'annule pas sur son ensemble de définition ;
3. est strictement décroissante sur $] - \infty ; 0[$ et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 0$	

Démonstration. Nous allons démontrer que la fonction inverse, notée f , est strictement décroissante sur $] - \infty ; 0[$ et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tous réels a, b non nuls, on remarque que $f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$.

Démontrons d'abord que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $] - \infty ; 0[$.

Soient a et b deux réels tels que $a < b < 0$. Nous allons démontrer que $f(a) > f(b)$, c'est-à-dire que $f(a) - f(b) > 0$.

$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$. Or puisque $a < b < 0$, $b - a > 0$ et $ab > 0$ donc $\frac{b-a}{ab} > 0$, c'est-à-dire $f(a) - f(b) > 0$.

Démontrons maintenant que f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Pour démontrer que f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, nous allons démontrer que $f(a) > f(b)$.

Puisque $0 < a < b$, alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ donc $\frac{b-a}{ab} > 0$, c'est-à-dire $f(a) - f(b) > 0$, autrement dit $f(a) > f(b)$. Nous venons donc de démontrer que f est strictement décroissante sur $]0 ; \infty[$. $\square$

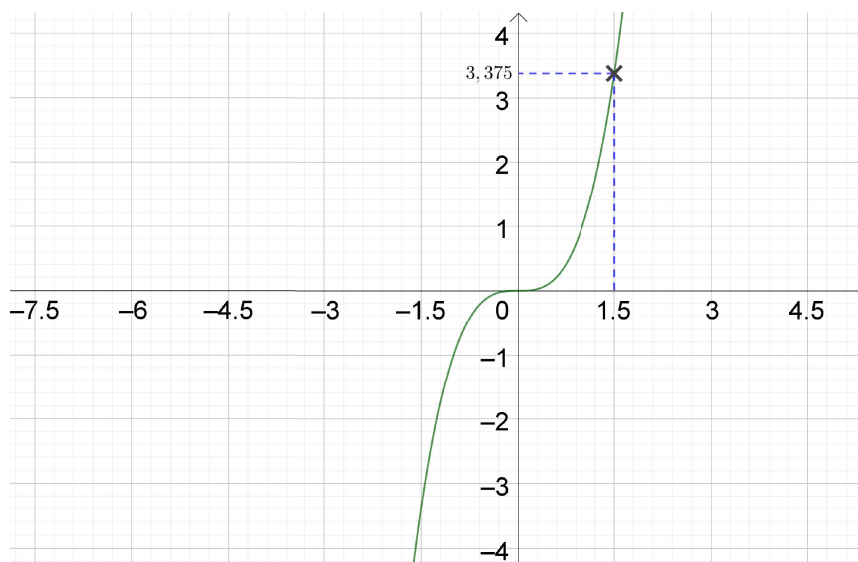
II.2 Fonction cube.

Définition : La fonction cube est la fonction qui, à tout réel x , associe le réel x^3 .

Exemple : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

$f(-2) = (-2)^3 = -8$ donc -8 est l'image de -2 par la fonction cube.

$f(1,5) = 1,5^3 = 3,375$ donc 1,5 est un antécédent de 3,375 par la fonction cube.



Propriétés : La fonction cube :

1. est impaire ;
2. est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-\infty$	0	$+\infty$

Objectif : Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f , comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.

Communs : Exercices 1, 2, 3, 4 fiche A.

Pour les plus rapides : Exercices 5 à 16 fiche A.

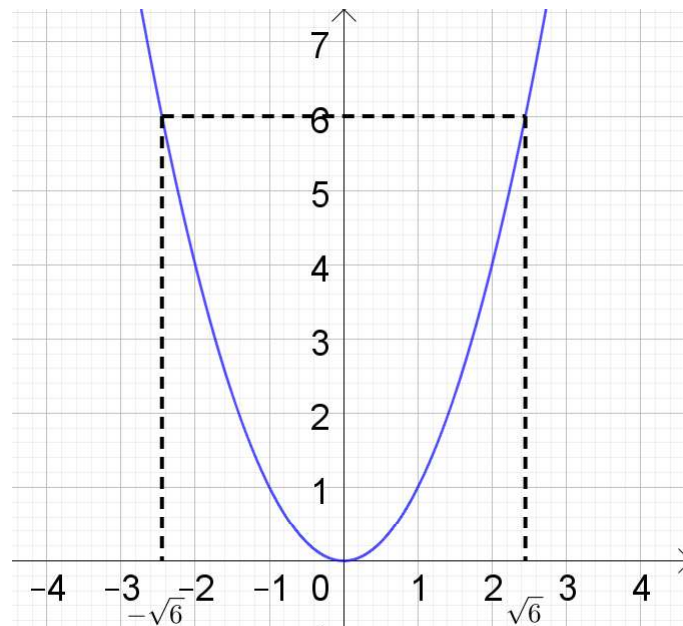
III Applications.

III.1 Équations et inéquations.

Propriété : Soit a un nombre réel. On considère l'équation $x^2 = a$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$. Alors :

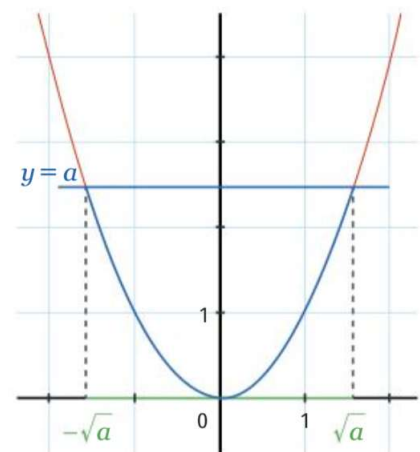
- si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution ;
- si $a = 0$, l'équation a pour unique solution $x = 0$;
- si $a > 0$, l'équation a deux solutions : $x = -\sqrt{a}$ et $x = \sqrt{a}$.

Exemple : L'équation $x^2 = 6$ admet deux solutions : $x = \sqrt{6}$ ou $x = -\sqrt{6}$.



Propriété : Soit a un nombre réel. On considère l'inéquation $x^2 \leq a$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$. Alors :

- si $a < 0$, l'inéquation n'a pas de solution ;
- si $a = 0$, l'inéquation a pour unique solution $x = 0$;
- si $a > 0$, l'ensemble des solutions est l'intervalle $[-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$.



Exemple : Considérons l'inéquation $x^2 \leq 100$. L'ensemble des solutions est l'intervalle $[-\sqrt{100}; \sqrt{100}]$, c'est-à-dire $[-10; 10]$.

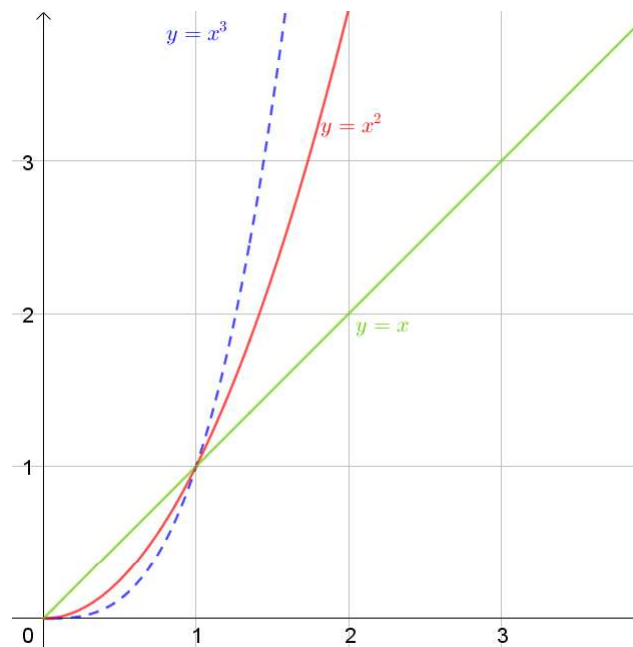
Propriété : Pour tout nombre réel a , l'équation $x^3 = a$ admet exactement une solution, que l'on appelle racine cubique de a , notée $\sqrt[3]{a}$.

Exemple : Considérons l'équation $x^3 = 27$. La solution de cette équation est $x = \sqrt[3]{27} = 3$.

III.2 Positions relatives des courbes sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème (à démontrer) : Soit x un réel positif ou nul.

- Si $0 < x < 1$, alors $x > x^2 > x^3$.
- Si $x > 1$, alors $x < x^2 < x^3$.
- Si $x = 0$ ou $x = 1$, alors $x = x^2 = x^3$.



Démonstration. 1. Soit $x \in]0; 1[$:

- (a) $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$. Or $x^2 > 0$ et comme $x < 1$, $x - 1 < 0$ donc par produit, $x^2(x - 1) < 0$ donc $x^3 < x^2$.
- (b) $x^2 - x = x(x - 1)$. Or $x > 0$ et $x < 1$ donc $x - 1 < 0$ donc par produit, $x(x - 1) < 0$ donc $x^2 < x$.

2. Soit $x > 1$:

- (a) $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$. Or $x^2 > 0$ et comme $x > 1$, $x - 1 > 0$ donc par produit, $x^2(x - 1) > 0$ donc $x^3 > x^2$.

(b) $x^2 - x = x(x - 1)$. Or $x > 1$ donc $x > 0$ et $x - 1 > 0$ donc par produit, $x(x - 1) > 0$ donc $x^2 > x$.

3. $0 = 0^2 = 0^3$ et $1 = 1^2 = 1^3$.

□

Théorème :

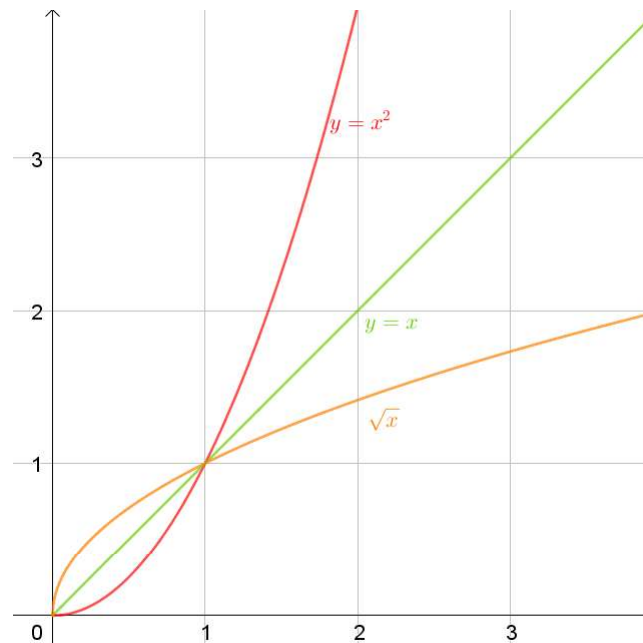
1. Soit x un réel positif ou nul :

(a) Si $0 < x < 1$, alors $\sqrt{x} > x$.

(b) Si $x > 1$, alors $\sqrt{x} < x$.

(c) Si $x = 0$ ou si $x = 1$, alors $x = \sqrt{x}$.

2. Les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Objectif : Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$.

Communs : Exercices 17, 18, 19 fiche B.

Pour les plus rapides : Exercices 20 à 24 fiche B.