

Chapitre 11 : Fonctions affines et tableau de signes.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Contenus.

- Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.

Capacités attendues.

- Résoudre une inéquation du type $f(x) < k$ par la méthode algébrique.
- Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.

Sources :

- Le livre scolaire 2DE.
- Hyperbole 2nd.
- Sesamath
- Barbazo

Activité 1 : QCM plieurs fonctions affines.

I Fonctions affines.

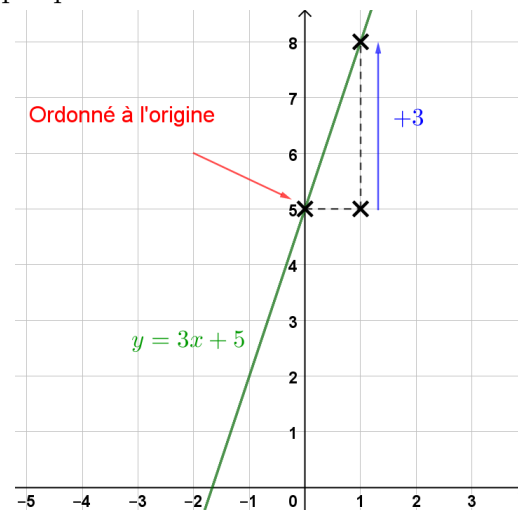
I.1 Définitions et représentation graphique.

Définition : Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine lorsqu'il existe deux réels m et p tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 3x + 5$ est une fonction affine. De même que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto -0,5x - 2$.

Propriété : Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 3x + 5$ admet une droite pour représentation graphique. Son ordonnée à l'origine vaut 5 et son coefficient directeur vaut 3.



Remarques :

- Pour la suite de la leçon, on considérera une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ définie sur $\mathbb{R}$, et on notera (d) sa droite représentative dans un repère. Le nombre m est appelé coefficient directeur de (d) et le nombre p est appelé ordonnée à l'origine de (d) .
- Si $p = 0$, la fonction $x \mapsto mx$ est une fonction affine particulière appelée fonction linéaire.
- Si $m = 0$, la fonction $x \mapsto p$ est une fonction affine particulière appelée fonction constante.

Objectif : Reconnaître une fonction affine, déterminer le coefficient directeur / l'ordonnée à l'origine.

Communs : Exercices 1, 2, 4, 3 fiche 1.

Pour les plus rapides : Exercice 5 fiche 1.

Activité 2.

I.2 Caractérisation.

Propriété : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous réels distincts a et b , le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant.

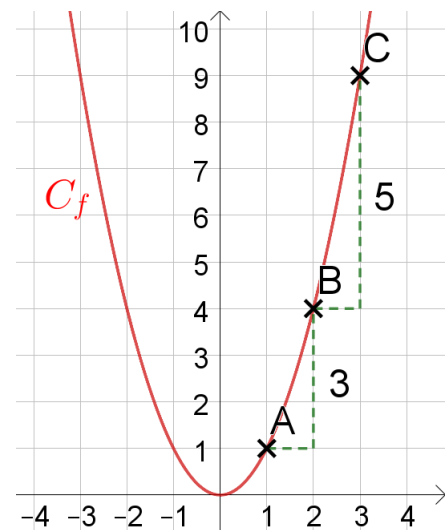
Remarque : Le nombre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est appelé le **taux d'accroissement** de f entre a et b .

Exemple : Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. On va calculer le taux d'accroissement de f entre $a = 1$ et $b = 2$, puis entre $b = 2$ et $c = 3$.

D'un côté, on a $\tau_1 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 3$.

D'un autre côté, on a $\tau_2 = \frac{f(c)-f(b)}{c-b} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{9-4}{3-2} = 5$.

D'après la propriété précédente, la fonction f n'est pas une fonction affine.



Objectif : Calculer le taux d'accroissement d'une fonction affine.

Communs : Exercices 6, 7 fiche 1.

Pour les plus rapides : Exercices 8, 9, 10 fiche 1.

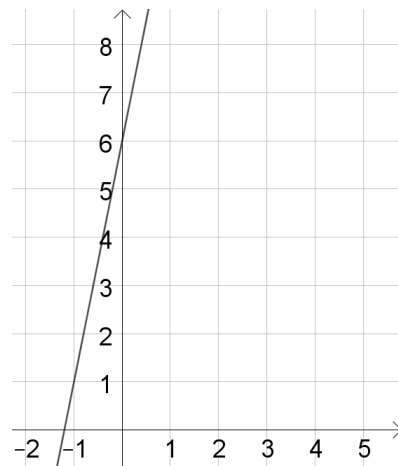
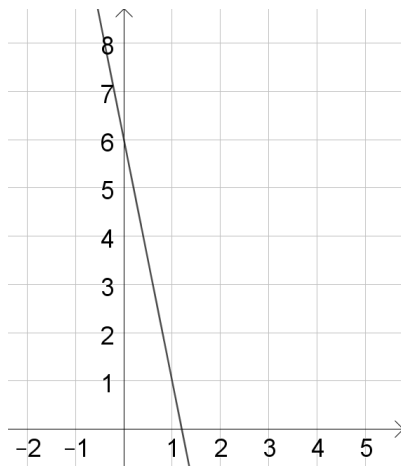
I.3 Sens de variation.

Propriété :

- Si $m > 0$, alors f est une fonction strictement croissante.
- Si $m < 0$, alors f est une fonction strictement décroissante.

Exemple :

La fonction $k : x \mapsto -5x + 6$ est décroissante. La fonction $k : x \mapsto 5x + 6$ est croissante.



Objectif : Déterminer les variations d'une fonction affine.

Communs : Exercices 11, 12 fiche 1.

Pour les plus rapides : Exercices 13, 14 fiche 1.

Activité 3 : n°2 page 242.

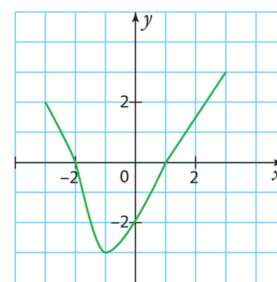
II Tableau de signes.

II.1 Définition.

Étudier le signe d'une fonction g revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $g(x)$ est strictement positif, nul ou strictement négatif. Le signe est souvent présenté sous la forme d'un tableau, appelé **tableau de signes**.

Exemple : Soit h la fonction définie sur $[-3; 3]$ dont on donne ci-contre la courbe représentative dans un repère. Le tableau de signes est :

x	-3	-2	1	3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$



Objectif : Construire / interpréter un tableau de signes.

Communs : Exercices 19, 20 page 252, 42 page 254.

Pour les plus rapides : Exercices 21, 22 page 252, 43 page 254.

II.2 Signe d'une fonction affine.

Définition : On appelle **racine** de f le réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

Exemple : Considérons la fonction $h : x \mapsto -2x + 4$. Le nombre $x_0 = 2$ est racine de h .

En effet, $h(2) = -2 \times 2 + 4 = -4 + 4 = 0$.

Cas $m > 0$:

Propriété :

Si $m \neq 0$, alors $f(x) = 0 \iff x = -\frac{p}{m}$.

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

Si $m > 0$, alors $f(x) > 0 \iff x > -\frac{p}{m}$.

Cas $m < 0$:

Si $m < 0$, alors $f(x) > 0 \iff x < -\frac{p}{m}$.

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

Objectif : Déterminer le signe d'une fonction affine.

Communs : Exercices 23, 25, 26 page 253, 48, 49 page 255.

Pour les plus rapides : Exercices 24, 27 page 253, 50 page 255.

III Résolution d'inéquations.

III.1 Définition.

Définition : Une inéquation est une inégalité dans laquelle figurent une ou plusieurs inconnues désignées par des lettres.

Une solution d'une inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inégalité, c'est trouver toutes ses solutions réelles.

Exemple : $2x - 4 \leq 3$ est une inéquation d'inconnue x .

-6 est une solution de cette inéquation. En effet, $2 \times (-6) - 4 = -16$ et $-16 \leq 3$.

5 n'est pas solution de cette inéquation. En effet, $2 \times 5 - 4 = 6$ et $6 > 3$.

III.2 Résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue.

Pour résoudre une inéquation du type $ax + b < cx + d$ ou $ax + b \geq cx + d$ (avec $a \neq c$), on utilise les propriétés sur les inégalités (automatismes - fiche outil 17).

Exemple : On cherche à résoudre l'inéquation du premier degré $3x + 1 \geq x - 7$.

$$3x + 1 \geq x - 7 \iff 2x + 1 \geq -7 \text{ (on soustrait } x \text{ de part et d'autre de l'inégalité.)}$$

$$\iff 2x \geq -8 \text{ (on soustrait 1 de part et d'autre de l'inégalité.)}$$

$$\iff x \geq -4 \text{ (on divise par 2 de part et d'autre de l'inégalité.)}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\mathcal{S} = [-4; +\infty[$.



Cela signifie que tout les nombres réels supérieurs ou égaux à -4 sont solutions de l'inégalité $3x + 7 \geq x - 7$.

Remarque : Les quatre inéquations qui apparaissent dans l'exemple sont dites équivalentes : on utilise le symbole $\iff$.

Objectif : Résoudre une inéquation du type $f(x) < k$ par la méthode algébrique.

Communs : Exercices 49, 52, 53 page 79.

Pour les plus rapides : Exercices 50, 51, 54 page 79.

Activité 5 : n°3 page 243.

III.3 Résolution d'une inéquation produit ou quotient.

Pour résoudre une inéquation du type $(ax+b)(cx+d) \geq 0$ ou du type $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$, on peut utiliser un tableau de signes.

Exemple : On cherche à résoudre l'inéquation produit $(x+1)(-2x+6) \leq 0$.

On va construire le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$-2x+6$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+1)(-2x+6)$	$-$	0	0	$-$

On résout chaque équation $x+1=0$ et $-2x+6=0$, puis on porte les solutions obtenues par ordre croissant sur la première ligne :

$$x+1=0 \iff x=-1 \text{ et } -2x+6=0 \iff x=3.$$

On remplit ensuite le tableau de signes en déterminant le signe des fonctions affines $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto -2x+6$.

On applique la règle du signe d'un produit pour compléter le signe de $(x+1)(-2x+6)$.

Conclusion : on lit sur la dernière ligne et la première ligne que $(x+1)(-2x+6)$ est négatif ou nul pour $x \leq -1$ ou $x \geq 3$. L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$.

Objectif : Étudier le signe d'un produit ou d'un quotient.

Communs : Exercices 29, 31 page 253, 55 page 255.

Pour les plus rapides : Exercices 30, 32, 33, 34 page 253, 51, 52, 53, 54 page 255.

Objectif : Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.

Communs : Exercices 36, 38, 40 page 254.

Pour les plus rapides : Exercices 37, 39, 41 page 254, 57, 58, 59, 60, 61 page 256.