

Chapitre 8 : Dérivation d'un point de vue local.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Thème : Analyse.

Contenus : Approche graphique de la notion de nombre dérivé.

- Sécantes à une courbe passant par un point donné ; taux de variation en un point.
- Tangente à une courbe en un point, définie comme position limite des sécantes passant par ce point.
- Nombre dérivé en un point défini comme limite du taux de variation en ce point.
- Équation réduite de la tangente en un point.

Capacités attendues :

- Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
- Construire la tangente à une courbe en un point.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.

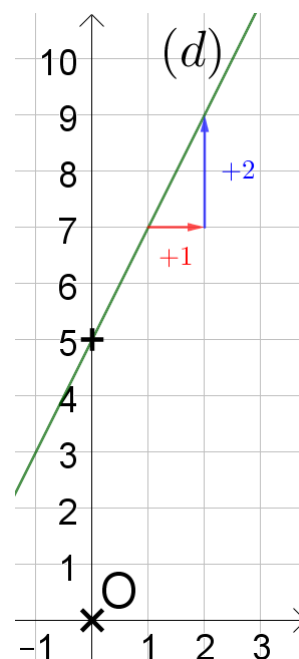
Commentaires.

- La notion de nombre dérivé est introduite à l'aide du taux de variation. Le signe de la dérivée constituera ultérieurement l'outil efficace pour étudier les variations d'une fonction. Il convient de limiter les calculs de taux de variation à quelques exemples simples, comme celui de la fonction carré entre x_1 et x_2 , qui fournit l'occasion d'utiliser la factorisation de $x_2^2 - x_1^2$.
- La notion de nombre dérivé gagne à être illustrée dans des contextes variés :
 - dans le cadre d'un mouvement rectiligne, il est possible d'interpréter le taux de variation de la position du point mobile entre deux instants comme une vitesse moyenne et le nombre dérivé comme une vitesse instantanée ;
 - dans le cadre économique, le nombre dérivé est relié au coût marginal.
- A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on visualise la position des sécantes à une courbe en un point.
- Il est recommandé de ne pas donner la définition formelle de la notion de limite et de s'en tenir à une approche intuitive à partir d'exemples. Le vocabulaire et la notation correspondants sont introduits à l'occasion du travail sur la notion de nombre dérivé.

I Rappels : équation réduite d'une droite.

Considérons la droite (d) d'équation réduite $y = 2x + 5$, dont on donne la représentation graphique ci-contre.

Dans l'équation réduite, le nombre figurant devant le x vaut 2 : il correspond au **coefficient directeur** de la droite (d) . Cela signifie que si on se place sur un point quelconque de la droite et qu'on se décale d'une unité vers la droite, on doit monter de deux unités vers le haut pour rejoindre la droite. Le nombre 5 correspond à **l'ordonnée à l'origine** : c'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite (d) avec l'axe des ordonnées.



Objectif : Représenter une droite à partir de son équation réduite.

Communs : Exercices 1, 3, 4, 5 fiche n°1.

Pour les plus rapides : Exercices 2, 6, 7 fiche n°1.

Activité n°2 : rappels du taux de variation à partir de la vidéo d'Yvan Monka .

II Taux de variation.

Pour la suite de la leçon, on considérera f une fonction définie sur un intervalle I , a un nombre réel appartenant à I , et h un nombre réel différent de 0 tel que $a + h \in I$.

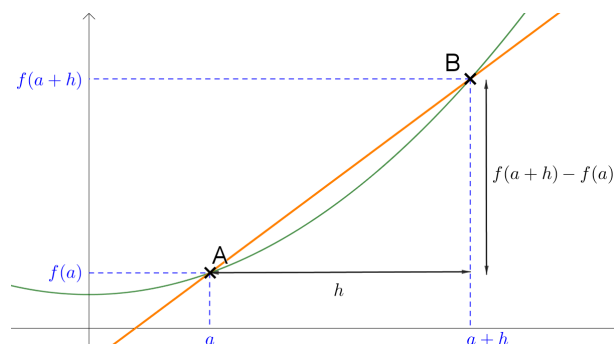
Définition : On appelle **taux de variation** de f au point d'abscisse a (ou entre a et $a+h$) le nombre $\tau = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple : Considérons la fonction $f : x \mapsto x^3$. Le taux de variation de f entre 0 et 0+5 est le nombre :

$$\tau = \frac{f(0+5)-f(0)}{5} = \frac{f(5)-f(0)}{5} = \frac{5^3-0^3}{5} = \frac{125}{5} = 25.$$

Définition : Une sécante à la courbe représentative d'une fonction est une droite passant par deux points distincts de cette courbe.

Propriété : Le taux de variation d'une fonction f entre les valeurs a et $a+h$ correspond au coefficient directeur de la sécante passant par $A(a; f(a))$ et $B(a+h; f(a+h))$.



Exemple :

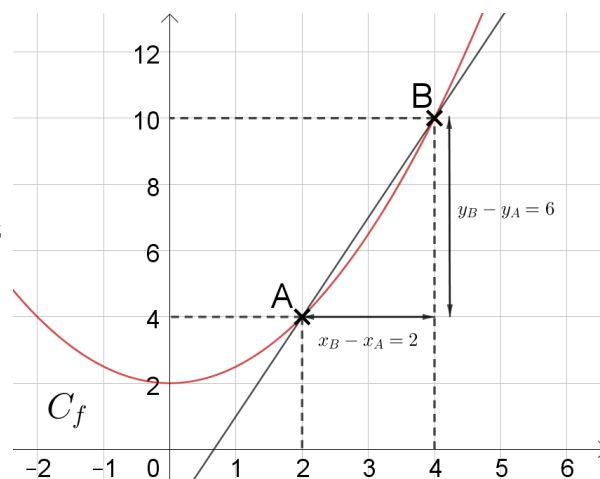
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5x^2 + 2$. On note C_f sa courbe représentative dans le repère ci-dessous, et on cherche à déterminer le taux de variation de f entre 2 et 4.

$$f(2) = 0,5 \times 2^2 + 2 = 4 \text{ donc } A(2; 4) \in C_f.$$

$$f(4) = 0,5 \times 4^2 + 2 = 10 \text{ donc } B(4; 10) \in C_f.$$

Le taux de variation de f entre 2 et 4 est le coefficient directeur de la sécante (AB) :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10 - 4}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3.$$



Méthode : Déterminer le taux de variation d'une fonction.

Pour déterminer le taux de variation d'une fonction f entre a et b :

- On détermine $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$,
- On calcule le coefficient directeur de la droite (AB) , qui vaut $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Objectif : Interpréter le taux de variation comme pente de la sécante à la courbe passant par deux points distincts.

Communs : Exercices 1 à 9 fiche n°2.

Pour les plus rapides : Exercice 41, 42, 44 page 122, 10, 11 fiche n°2.

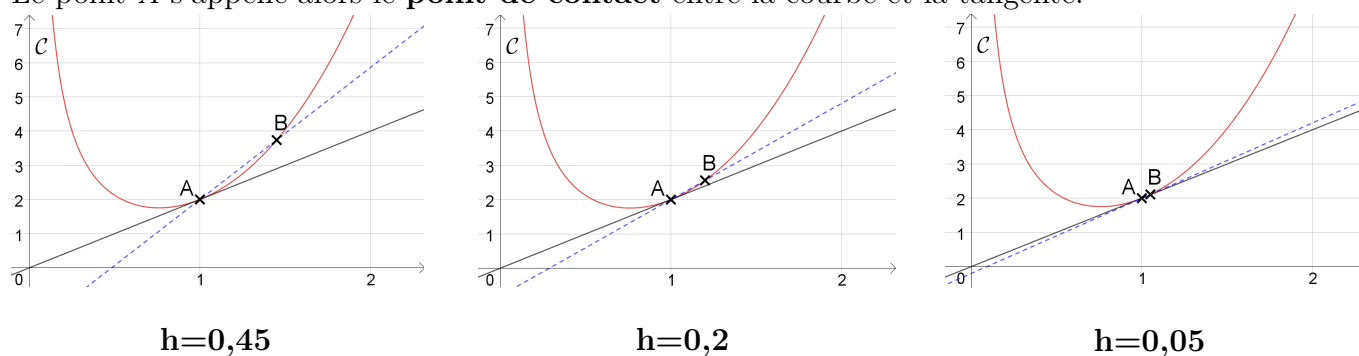
Explications sur ce qu'est une tangente.

III Nombre dérivé, point de vue local.

III.1 Tangente à une courbe.

Définition : Une **tangente** à une courbe $\mathcal{C}$ en un point A est la position limite, lorsqu'elle existe, de la sécante (AB) , quand B , qui est un autre point de la courbe $\mathcal{C}$, se rapproche vers A jusqu'à se confondre avec lui.

Le point A s'appelle alors le **point de contact** entre la courbe et la tangente.



Objectif : Construire la tangente à une courbe en un point.

Communs : Exercices 1 à 3 fiche n°3.

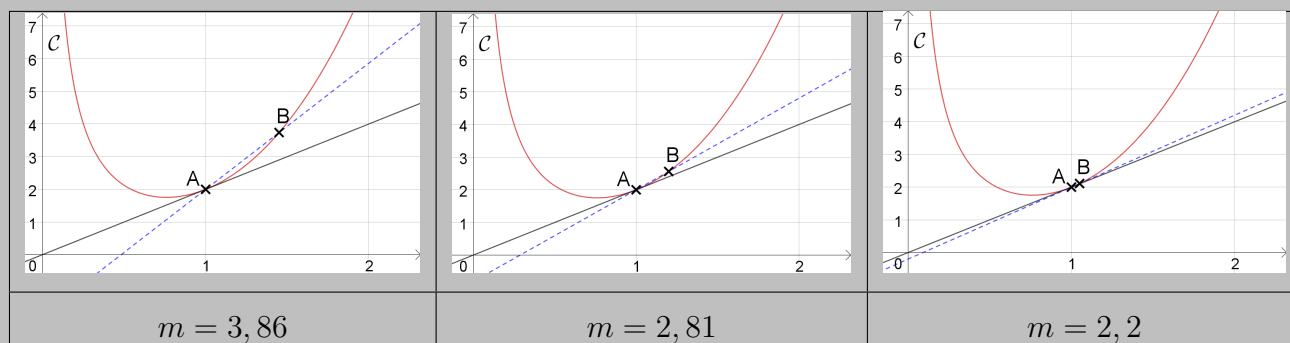
Pour les plus rapides : Exercices 4 à 6 fiche n°3.

Activité n°3.

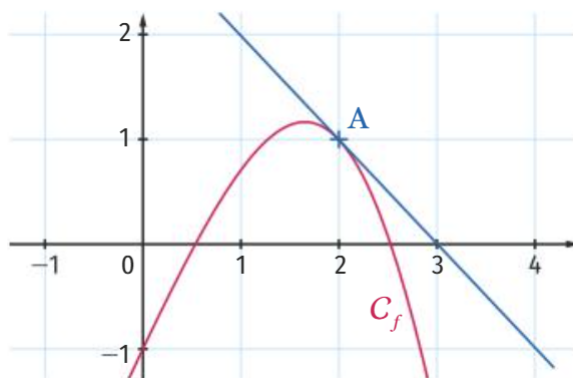
III.2 Nombre dérivé.

Définition : Si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0, on dit que la fonction f est **dérivable en a** . Le nombre L s'appelle **nombre dérivé de f en a** , se note $f'(a)$ et se lit « f prime de a ». On note alors : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$

Traduction : ☀ Graphiquement, on observe que le coefficient directeur m de la droite (AB) se rapproche de celui de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A , qui vaut 2 dans l'exemple ci-dessous :



Exemple : Soit f une fonction dont on a tracé la représentation graphique C_f dans le repère ci-contre. Alors $f'(2)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à C_f au point A d'abscisse 2. Ce coefficient directeur valant -1 , on en déduit que $f'(2) = -1$.



Remarque : Attention, il ne faut pas confondre $f(a)$ et $f'(a)$. Dans l'exemple précédent, $f'(2) = -1$ alors que $f(2) = 1$.

Objectif : Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.

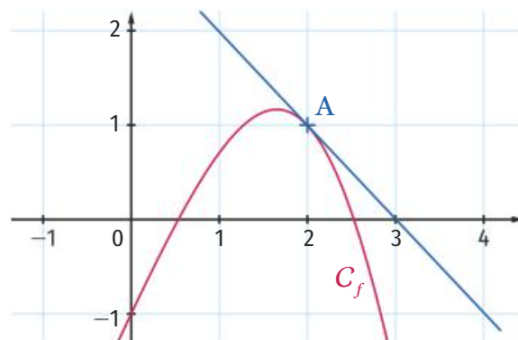
Communs : Exercices 16, 17, 18 page 148, 35, 36, 38, 42 page 150, 7 fiche 3.

Pour les plus rapides : Exercices 37, 39 page 150, 45, 46 page 151, 8 fiche 3.

III.3 Équation réduite de la tangente.

Propriété : L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Exemple : En reprenant l'exemple précédent, on a $f'(2) = -1$ et on observe que $f(2) = 1$. Ainsi, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en 2 est donnée par $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, soit $y = -1(x - 2) + 1$ donc $y = -x + 3$.



Objectif : Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.

Communs : Exercices 47, 49, 50, 52 page 151.

Pour les plus rapides : Exercices 48, 51 page 151.