

Chapitre 6 : Polynômes de degré 2.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Thème : Analyse.

Contenus :

- Représentations graphiques des fonctions $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + b$, $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Axes de symétrie.
- Racines et signe d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée (le calcul des racines à l'aide du discriminant ne figure pas au programme).

Capacités attendues :

- Associer une parabole à une expression algébrique de degré 2, pour les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + b$, $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Déterminer des éléments caractéristiques de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ (signe, extremum, allure de la courbe, axe de symétrie).
- Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 2.
- Savoir factoriser, dans des cas simples, une expression du second degré en connaissant au moins une de ses racines.
- Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 2 pour trouver ses racines et étudier son signe.
- Résoudre des équations de la forme $x^2 = c$ avec c positif.

Commentaires.

- Les fonctions polynômes de degré 2 ou 3 fournissent des occasions de pratiquer le calcul numérique (image d'un nombre donné) et littéral (développement, factorisation) et de travailler sur les représentations graphiques. Les connaissances sont mobilisées sur les translations.
- Les exemples prennent appui sur des situations réelles (impôts, hauteurs de marée, tarifs de courrier, évolution de l'émission de CO2...) et internes aux mathématiques (optimisation en géométrie).
- La recherche systématique des racines d'un polynôme de degré 2 ne figurant pas au programme, on privilégie les situations où les racines sont évidentes ainsi que les interprétations graphiques. En cas de besoin, la résolution d'équations du second degré peut se faire à l'aide de solveur.

Activité 1.

I Généralités sur les fonctions polynômes du second degré.

I.1 Définition.

Définition : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction polynôme du second degré lorsqu'il existe trois réels a, b, c avec $a \neq 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

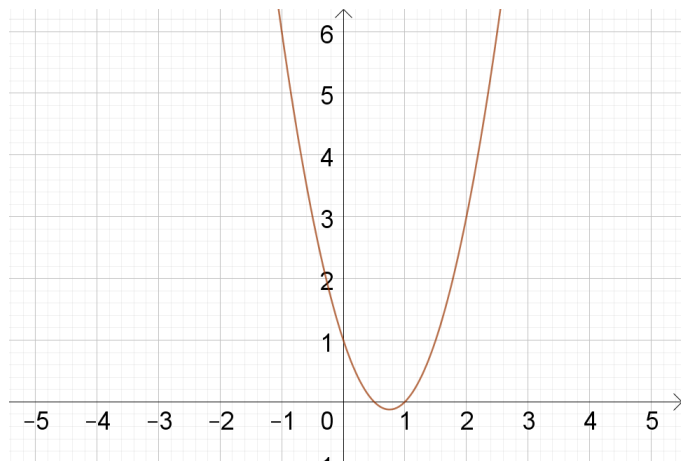
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Exemple : La fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 5x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme du second degré.

I.2 Représentation graphique.

Définition : La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré dans un repère orthogonal est une parabole.

Exemple : Voici la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$ dans un repère orthogonal.



Remarque : Pour la suite de la leçon, on considérera a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.

Objectif : Reconnaître une fonction polynôme de degré 2.

Communs : Exercices 1 et 2 fiche.

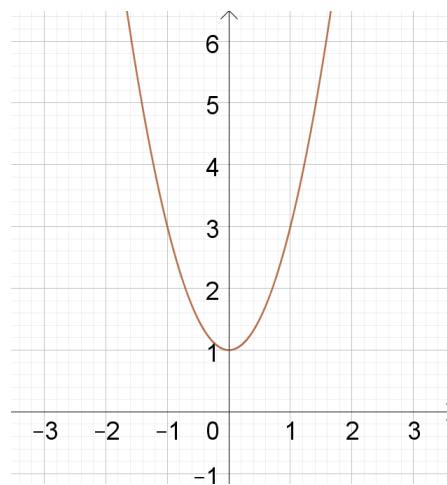
Pour les plus rapides : Exercice 3 fiche.

Activité 2.

II Cas particulier : fonction du type $x \mapsto ax^2 + b$.

Propriété : La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + b$ dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et a pour sommet le point $S(0; b)$.

Exemple : Voici la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 1$ dans un repère orthonormé :



La courbe représentative de la fonction f est une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et dont le sommet est le point $S(0; 1)$.

Remarque : Pour des fonctions de ce type, $f(0) = b$ donc b peut se lire à l'intersection de la courbe représentative de la fonction et de l'axe des ordonnées.

Si $b = 0$, la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2$ est donc une parabole dont le sommet est $S(0; 0)$.

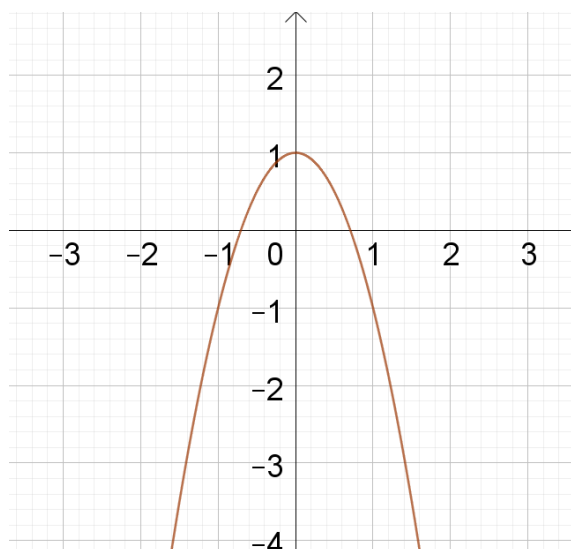
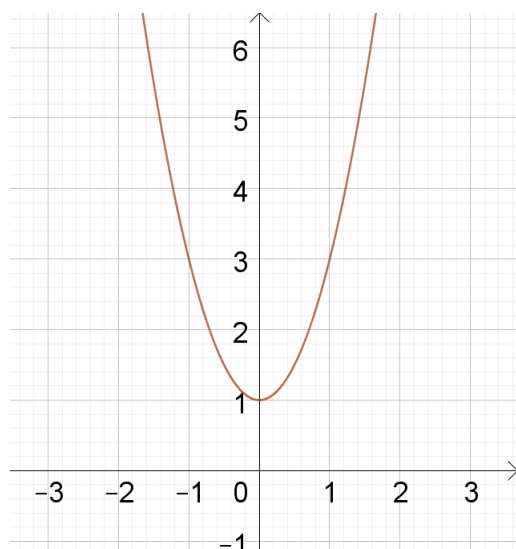
Propriété : Soient a un réel non nul et b un réel,

- Si $a > 0$, alors la fonction $f : x \mapsto ax^2 + b$ est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.
- Si $a < 0$, alors la fonction $f : x \mapsto ax^2 + b$ est strictement croissante sur $] -\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.

Exemple : Voici les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto 2x^2 + 1$$

$$g : x \mapsto -2x^2 + 1$$



Remarque : Lorsque $a > 0$, les branches de la parabole sont tournées vers le haut, et lorsque $a < 0$, elles sont tournées vers le bas.

Objectif : Associer une parabole à une expression algébrique de degré 2 pour les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2$ et $x \mapsto ax^2 + b$.

Communs : Exercices 20, 21 page 120, 22 page 121, 49 page 122.

Pour les plus rapides : Exercices 23, 24 page 121, 45, 46, 47, 48, 50, 51 page 122, 56 page 123.

Introduction : explication au tableau sur ce qu'est une racine.

III Forme factorisée d'un polynôme de degré 2.

III.1 Racines d'un polynôme de degré 2.

Définition : On considère la fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On dit que x_0 est racine du polynôme si $f(x_0) = 0$.

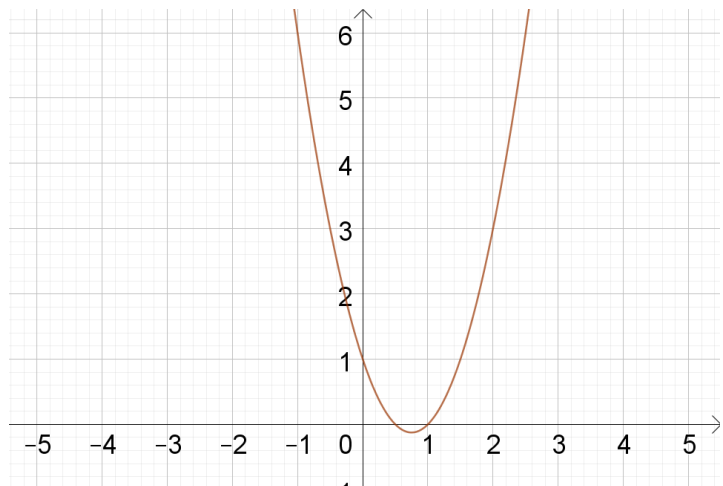
Exemple : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$.

$$f(1) = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0.$$

1 est une racine du polynôme $2x^2 - 3x + 1$.

Graphiquement, cela correspond à l'abscisse du point d'intersection de la courbe

$\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.



Quelle semble être la valeur numérique de la deuxième racine ? Vérifier cette conjecture par un calcul.

Objectif : Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 2.

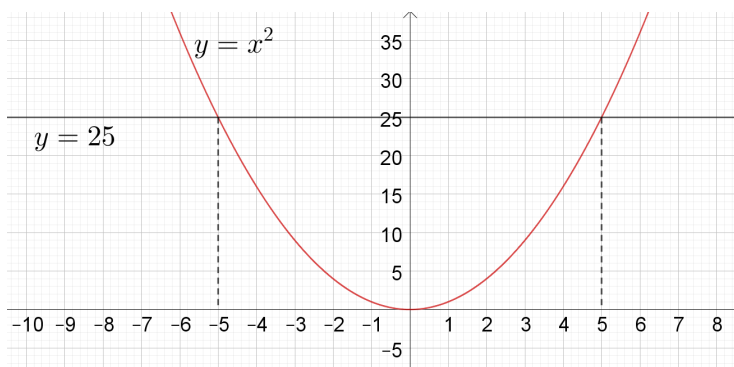
Communs : Exercices 60, 61 page 123.

Pour les plus rapides : Exercices 69 page 124.

Propriété : Soit $d \in \mathbb{R}$.

- Si $d > 0$, alors l'équation $x^2 = d$ admet deux solutions $x_1 = \sqrt{d}$ et $x_2 = -\sqrt{d}$.
- Si $d = 0$, alors l'équation $x^2 = d$ admet une seule solution : 0.
- Si $d < 0$, alors l'équation $x^2 = d$ n'admet pas de solution réelle.

Exemple : L'équation $x^2 = 25$ admet deux solutions : $\mathcal{S} = \{-5; 5\}$.



Objectif : Résoudre des équations de la forme $x^2 = c$ avec c positif.

Communs : Exercices 52, 53 page 123.

Activité 3.

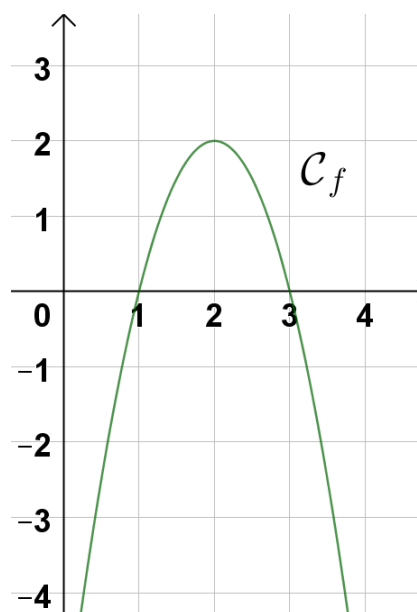
III.2 Fonction du type $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.

Propriété : Soit x_1 et x_2 deux réelles. La fonction $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme de degré 2.

Remarque : D'après le I.2, une telle fonction admet pour courbe représentative une parabole dans un repère orthogonal.

Les valeurs x_1 et x_2 sont les racines du polynôme.

Exemple : On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto -2(x - 1)(x - 3)$ dans un repère orthonormé :



Propriété : Les points d'intersection A et B de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ avec l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(x_1; 0)$ et $(x_2; 0)$.

Exemple : En reprenant l'exemple précédent, on observe que les points d'intersection de la fonction f avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(1;0)$ et $(3;0)$.

Objectif : Savoir factoriser, dans des cas simples, une expression du second degré en connaissant au moins une des racines.

Communs : Exercice 28 page 121, 62, 63 page 123

Pour les plus rapides : Exercice 64, 66 page 123

Objectif : Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 2 pour trouver ses racines et étudier son signe.

Communs : Exercices 84, 86 page 125.

Pour les plus rapides : Exercices 85 page 125.

Propriété : Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2$.

Le tableau de signe de la fonction $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ est :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

Remarque : On dit que f est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

Exemple : Le tableau de signe de la fonction $f : x \mapsto -2(x - 1)(x - 3)$ est :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

La fonction f est du signe de a , c'est-à-dire négative, entre $-\infty$ et 1, et entre 3 et $+\infty$.

Elle est positive entre 1 et 3.

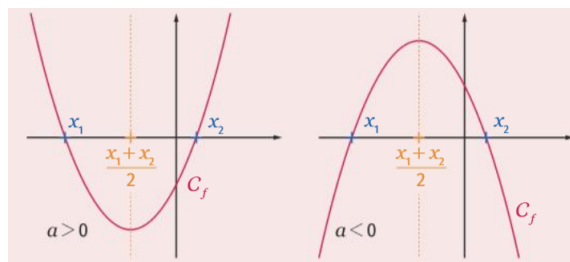
Elle admet un maximum égal à 2 atteint en 2, ainsi qu'un axe de symétrie correspondant à la droite d'équation $x = 2$.

Propriété : Soient a un réel non nul, x_1 et x_2 deux réels.

La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ définie sur $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

De plus :

- si $a > 0$, f admet un minimum en $\frac{x_1 + x_2}{2}$;
- si $a < 0$, f admet un maximum en $\frac{x_1 + x_2}{2}$.



Objectif : Associer une parabole / tableau de variations à une expression algébrique de degré 2 pour les fonctions de la forme $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.

Communs : Exercices 26, 27, 29 page 121.

Objectif : Déterminer les éléments caractéristiques de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ (signe, extremum, allure de la courbe, axe de symétrie).

Communs : Exercices 80, 87, 88 page 125.

Pour les plus rapides : Exercices 81, 82, 83, 89, 90, 94 page 125.