

Chapitre 4 : Suites arithmétiques et géométriques.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Contenus : Les suites arithmétiques comme modèles discrets d'évolutions absolues constantes (croissance linéaire) et les suites géométriques (à termes strictement positifs) comme modèles discrets d'évolutions relatives constantes (croissance exponentielle) :

- Relation de récurrence.
- Sens de variation.
- Représentation graphique.

Capacités attendues.

- Modéliser une situation à l'aide d'une suite.
- Reconnaître si une suite relève d'un modèle discret de croissance linéaire ou exponentielle.
- Conjecturer à partir de sa représentation graphique la nature arithmétique ou géométrique d'une suite.
- Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique.
- Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique à l'aide de la raison.

Commentaires.

- L'étude des suites arithmétiques et géométriques permet de comparer différents types de croissance.
- En classe de première, il convient de faire fonctionner la définition par récurrence d'une suite géométrique ou arithmétique (l'expression en fonction de n du terme général est étudiée en classe de terminale).
- On s'attache à présenter des suites qui ne sont ni arithmétiques, ni géométriques.

Activité n°1.

I Suites arithmétiques.

I.1 Définition.

Définition : Soit $r \in \mathbb{R}$. Une suite (u_n) est dite arithmétique de raison r si et seulement si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \xrightarrow{+r} \dots$$

Exemple : Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 2$: la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1, 2$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n - 2$: la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$.

Remarque :

- (u_n) est une suite arithmétique de raison r si et seulement si la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ est constante.
- Une suite arithmétique est un modèle discret d'évolution absolue constante.

Objectif : Calculer la raison d'une suite arithmétique ou un terme de rang donné.

Communs : Exercices 32, 33 page 91, 70 page 94.

Pour les plus rapides : Exercices 39 page 91, 71 page 94
--

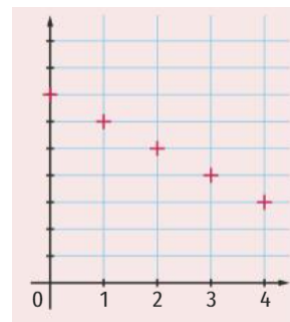
Objectif : Démontrer qu'une suite est ou n'est pas arithmétique.
--

Communs : Exercice 37 page 91, 75 page 94.
--

Pour les plus rapides : Exercice 76, 77, 78 page 94, exercice 87 page 95.

I.2 Représentation graphique.

La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés : on parle de croissance ou de décroissance linéaire.



Exemple : Calculer puis représenter les quatre premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de raison 5 et de premier terme $u_0 = -7$.



Objectif : Conjecturer, à partir de sa représentation graphique, la nature arithmétique d'une suite.

Communs : Exercice 36 page 91, 74 page 94.

I.3 Sens de variation d'une suite arithmétique.

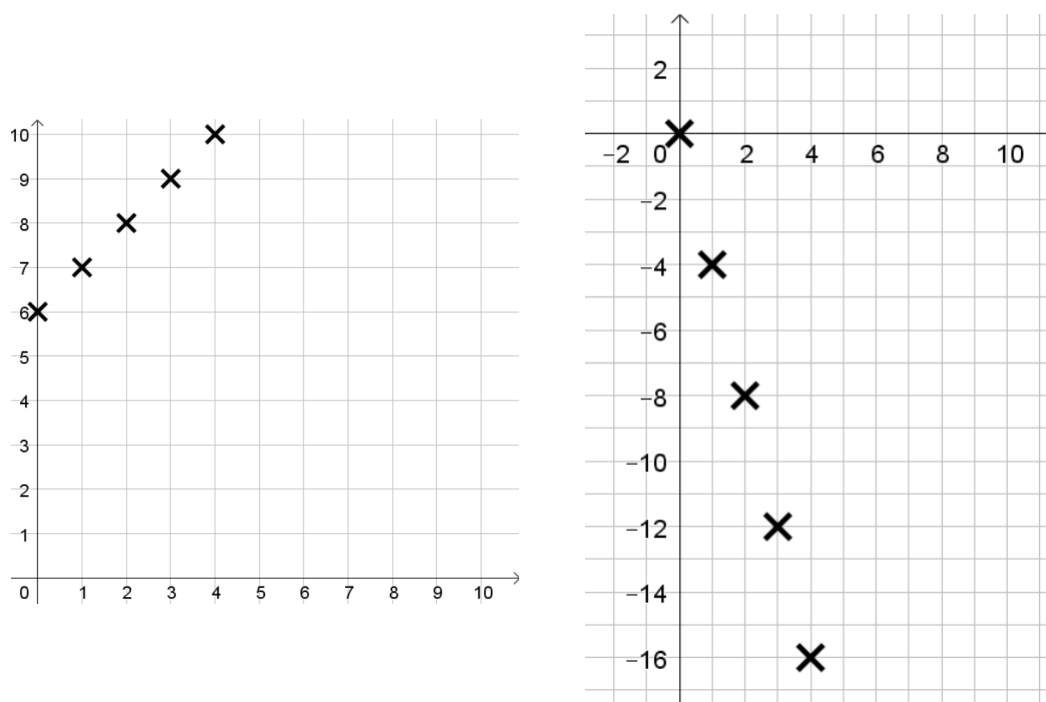
Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.

Exemple : Considérons les suites arithmétiques (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel par :

- $u_{n+1} = u_n + 1$ et $u_0 = 6$
- $v_{n+1} = v_n - 4$ et $v_0 = 0$

(u_n) est croissante car sa raison 1 est positive. (v_n) est décroissante car sa raison -4 est négative.



Objectif : Déterminer le sens de variation d'une suite à partir de sa raison.

Communs : Exercice 83 page 95.

Activité n°2.

II Suites géométriques.

II.1 Définition.

Définition : Soit $q \in \mathbb{R}$. Une suite (v_n) est une suite géométrique de raison q si et seulement si pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = q \times v_n$.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 6u_n$ pour tout entier naturel n est une suite géométrique de raison $q = 6$.

Remarques :

- Soit (u_n) une suite de réels non nuls. La suite (u_n) est géométrique si et seulement si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante.
- Nous supposons pour la suite que $u_0 > 0$ et $q > 0$ afin que les suites étudiées soient à termes strictement positifs comme l'exige le programme.
- Pour une suite géométrique (u_n) à termes strictement positifs, on a pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n} = \frac{qu_n-u_n}{u_n} = \frac{(q-1)u_n}{u_n} = q - 1$: une suite géométrique est donc un modèle d'évolution relative constante.

Objectif : Calculer la raison d'une suite arithmétique ou un terme de rang donné.

Communs : Exercices 34, 35 page 91, 72 page 94.

Pour les plus rapides : Exercice 73 page 94.

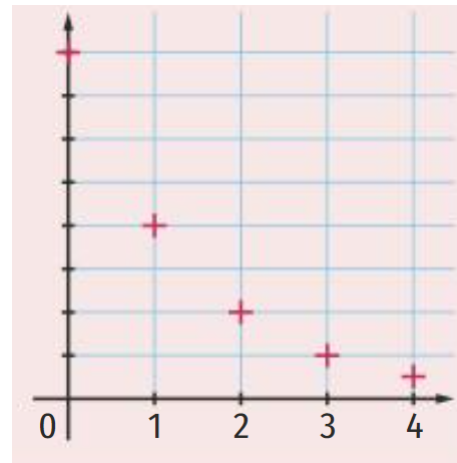
Objectif : Démontrer qu'une suite est ou n'est pas géométrique.

Communs : Exercices 41 page 91, 79 page 94.

Pour les plus rapides : Exercice 80, 81 page 94, 82 page 95.

II.2 Représentation graphique.

Le nuage de points associé à la représentation graphique d'une suite géométrique témoigne d'une croissance (ou d'une décroissance) exponentielle.



Exemple : Calculer, puis représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite géométrique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_0 = \frac{2}{3}$.



Objectif : Conjecturer si une suite est géométrique à partir de sa représentation graphique.

Communs : Exercice 74 page 94, 40 page 91.

II.3 Sens de variation d'une suite géométrique.

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique strictement positive de raison $q > 0$:

- si $q > 1$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Exemples :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 vérifiant $u_0 > 0$.

On a alors, pour tout entier naturel n ,
 $u_{n+1} = 3u_n$.

La raison 3 étant strictement supérieure à 1, on en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Soit (v_n) une suite géométrique de raison 0,4 vérifiant $v_0 > 0$.

On a alors, pour tout entier naturel n ,
 $v_{n+1} = 0,4v_n$.

La raison 0,4 étant strictement comprise entre 0 et 1, on en déduit que la suite (v_n) est strictement décroissante.

Remarque : une suite peut n'être ni arithmétique, ni géométrique.

Exemple : Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = n^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 1 + 2n - n^2 = 1 + 2n$: la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constante, donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 0 \implies n^2 > 0 \implies u_n > 0$. Comme la suite (u_n) est à termes strictement positifs, on peut faire le calcul suivant : soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2+1+2n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}$.

La suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas constante, donc (u_n) n'est pas une suite géométrique.

Objectif : Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique à partir de sa raison.

Communs : Exercice 84 page 95.

Objectif : Modéliser une situation par une suite.

Communs : Exercice problème.