

Chapitre 2 : Généralités sur les fonctions.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Durée : 3 semaines.

Contenus.

Les fonctions comme modèles mathématiques d'évolutions continues :

- Différents modes de représentation d'une fonction : expression littérale, représentation graphique.
- Notations $y = f(x)$ et $x \mapsto f(x)$
- Taux de variation (dont pente de la sécante)
- Fonction monotone sur un intervalle, lien avec le signe du taux de variation.

Capacités attendues.

- Modéliser la dépendance entre deux grandeurs.
- Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$ ou une inéquation de la forme $f(x) < k$ ou $f(x) > k$.
- Interpréter le taux de variation comme pente de la sécante à la courbe passant par deux points distincts.

Commentaires.

- Les exemples prennent appui sur des situations réelles (impôts, hauteurs de marée, tarif de courrier, évolution de l'émission de CO2...) et internes aux mathématiques (problèmes d'optimisation dans un cadre géométrique).
- Le professeur utilise différentes notations pour la variable : t , u ... et habitue les élèves à lire des graphiques reliant une grandeur y à une grandeur composée (x^2 , $1/x$...), ce qui permet de donner sens à l'expression « grandeurs inversement proportionnelles ».

Auto-évaluation.

Activité 1.

1 Notion de fonction.

1.1 Définition.

Définition 1 : Définir une fonction f sur un ensemble de réels D consiste à associer à chaque réel $x \in D$ un unique réel y appelé image de x .

Pour signifier que y est le réel associé à x par la fonction f , on note $y = f(x)$.

On note cette correspondance :

$$\begin{aligned} f &: D \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- D est l'ensemble de définition de la fonction f ,
- $f(x)$ est l'image de x par la fonction f ,
- x est un antécédent de $f(x)$ par la fonction f .

Exemple : Considérons la fonction ci-dessous :

$$\begin{aligned} f &: [-5; 5] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 2 \end{aligned}$$

On a alors $f(1) = 1^2 + 2 = 3$: l'image de 1 par f vaut 3.

D'autre part, $f(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$: l'image de -1 par f vaut aussi 3.

-1 et 1 sont donc deux antécédents de 3 par f .

Remarque : Un réel peut avoir plusieurs antécédents par une fonction, mais l'image d'un nombre réel par une fonction est unique.

Objectif : Modéliser la dépendance entre deux grandeurs.

Exercices 34, 35, 36, 37 page 122.

1.2 Représentation graphique.

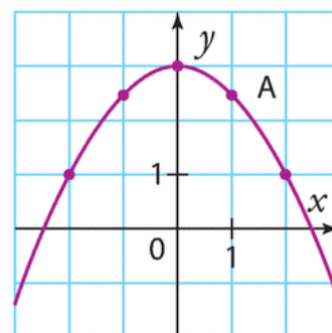
Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un ensemble D . Dans un repère, la courbe représentative de la fonction f , noté $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour x parcourant D .

Exemple : Soit h la fonction définie par $h(x) = 3 - 0,5x^2$ pour tout réel x .

$h(0) = 3 - 0,5 \times 0^2 = 3$ donc le point de coordonnées $(0;3)$ appartient à la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction h .

En calculant différentes les images par h de différentes valeurs de x , on obtient le tableau suivant :

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$h(x)$	1	2,5	2,875	3	2,875	2,5	1



Remarque : Il est important de bien distinguer les notations f , $\mathcal{C}_f$ et $f(x)$:

- f désigne la fonction ;
- $\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative de f ;
- $f(x)$ désigne un nombre : l'image de x par la fonction f .

Objectif : Exploiter la représentation graphique d'une fonction,
déterminer des images, antécédents.

Exercice 14 page 120.

Exercices 1 à 7 fiche 1.

Exercices 100 à 106 page 32.

Activité 2.

2 Résolution graphique d'équation et d'inéquations.

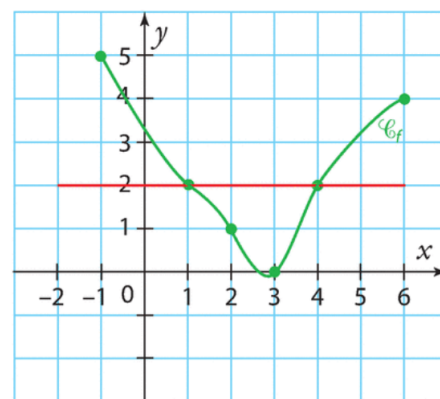
On peut résoudre de manière approchée une équation ou une inéquation en utilisant la courbe représentative d'une fonction.

Exemple : Considérons la fonction f définie sur $[-1; 6]$

et dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont 1 et 4 : elles correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = 2$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 2$ est $S = [1; 4]$: ce sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 2.



Objectif : Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$
ou une inéquation de la forme $f(x) < k$ ou $f(x) > k$.

Exercices 107 à 110 page 32.

Exercices 17 et 18 page 120.

Exercices 8 à 10 fiche 2.

Exercices 38, 39 page 122.

Activité 3.

3 Taux de variation.

3.1 Définition et propriété.

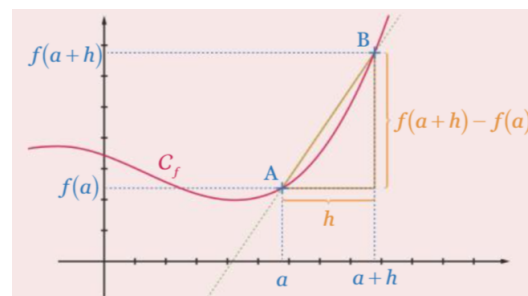
Dans cette sous-partie, on considérera f une fonction définie sur un intervalle I , a un nombre réel appartenant à I et h un réel différent de 0 tel que $a + h \in I$.

Définition 3 : On appelle taux de variation de f entre a et $a+h$ le nombre $\tau = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3$. Le taux de variation de la fonction f entre 0 et 0+5 est :

$$\tau = \frac{f(0+5)-f(0)}{5} = \frac{5^3-0}{5} = 25.$$

Propriété 4 : Le taux de variation de la fonction f entre les valeurs a et $a+h$ est le coefficient directeur de la droite passant par les points $A(a; f(a))$ et $B(a+h; f(a+h))$.



Exemple : Considérons la fonction ci-dessous :

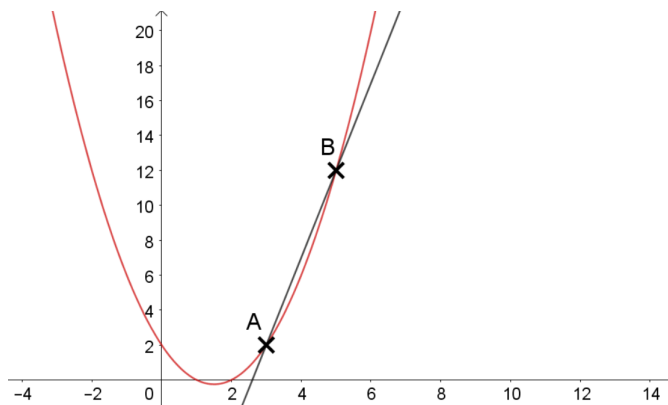
$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

Prenons deux points A et B d'abscisses respectives 3 et 5 :

$$f(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 2 = 2 \text{ et } f(5) = 5^2 - 3 \times 5 + 2 = 12.$$

Le taux de variation de f entre $A(3;2)$ et $B(5;12)$ vaut :

$$\frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{12-2}{5-3} = \frac{10}{2} = 5$$



Objectif : Interpréter le taux de variation comme pente de la sécante à la courbe passant par deux points distincts.

Exercices 15 et 16 page 120.

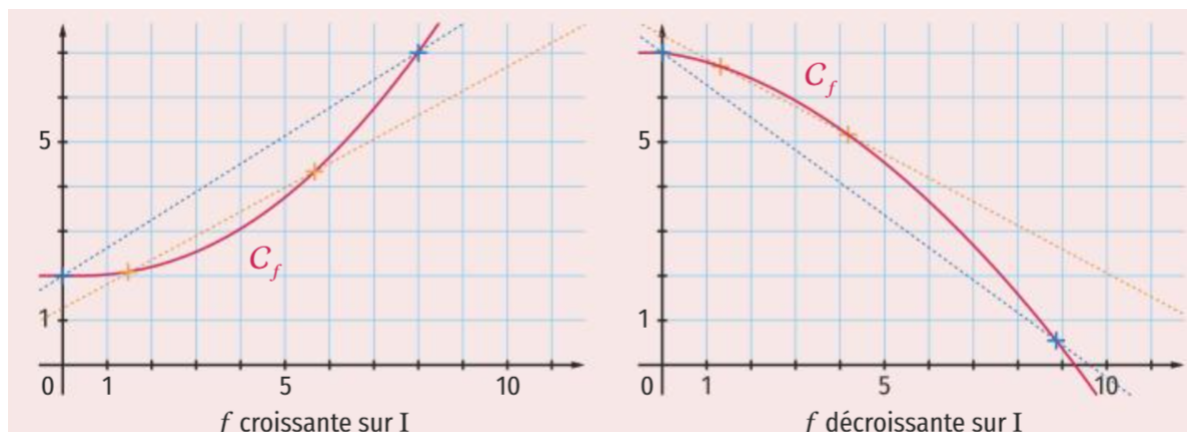
Exercices 40 à 42 page 122.

Exercices 43, 44 page 122.

3.2 Variation d'une fonction.

Propriété 5 : Soit f une fonction monotone sur un intervalle I . Alors :

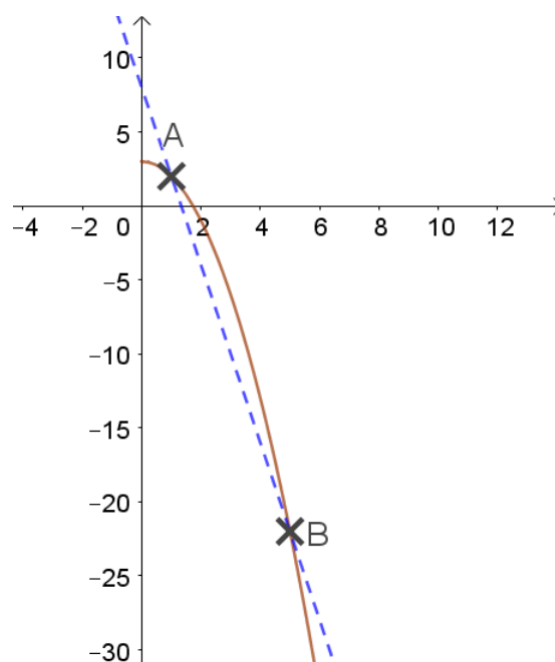
- si f est croissante sur I , alors les taux de variation de f sur I sont positifs.
- si f est décroissante sur I , alors les taux de variation de f sur I sont négatifs.



Exemple : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto 3 - x^2$ est décroissante sur l'intervalle $I = [0; +\infty]$. Le taux de variation entre deux valeurs quelconques de I est négatif.

Par exemple, entre 1 et 5, le taux de variation vaut :

$$\tau = \frac{(3-5^2)-(3-1^2)}{5-1} = \frac{-22-2}{4} = \frac{-24}{4} = -6 < 0$$



Objectif : Faire le lien entre les variations d'une fonction sur un intervalle et les signes des taux de variation sur cet intervalle.
--

Exercices 11 et 12 fiche 3.

Exercice 13 fiche 3.
