

Chapitre 1 : Suites numériques.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Durée : 2 semaines.

Contenus : Les suites sont présentées comme modèle mathématiques d'évolutions discrètes :

- Différents modes de génération d'une suite numérique.
- Sens de variation.
- Représentation graphique : nuage de points $(n, u(n))$;

Capacités attendues.

- Modéliser une situation à l'aide d'une suite.
- Calculer un terme de rang donné (relation fonctionnelle ou récurrence).
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite.

Commentaires.

- Utilisation d'un tableur pour calculer des termes d'une suite (favorise la compréhension des différents modes de génération).
- Modéliser des situations discrètes simples, en lien avec les autres enseignements de la série (évolution ou actualisation d'un capital, évolution d'une colonie bactérienne...).
- En lien avec l'écriture fonctionnelle, on utilise la notation $u(n)$ préalablement à celle de u_n .

Algorithmique :

- Calculer un terme de rang donné d'une suite, une somme finie de termes.
- Déterminer une liste de termes d'une suite et les représenter.
- Déterminer le rang à partir duquel les termes d'une suite sont supérieurs ou inférieurs à un seuil donné, ou aux termes de même rang d'une autre suite.

1 Définition.

Définition : Une suite numérique u , notée aussi (u_n) ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$ ou une de ses parties.

A la variable entière n on associe le nombre $u(n)$ (aussi noté u_n) appelé terme de rang n de la suite u :

$$u : n \mapsto u(n)$$

Exemple : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont les premiers termes sont : 2; -1; 3,5 et $\frac{1}{3}$. On a alors $u(0) = 2, u(1) = -1, u(2) = 3,5$ et $u(3) = \frac{1}{3}$.

On peut également écrire $u_0 = 2, u_1 = -1, u_2 = 3,5$ et $u_3 = \frac{1}{3}$.

Une suite peut être définie :

- par une relation fonctionnelle, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f telle que pour tout entier naturel n , $u(n) = f(n)$.
- par une relation de récurrence : le terme suivant est défini avec le ou les termes qui le précèdent.
- par un autre moyen, comme par exemple la suite des décimales du nombre π .

Exemple : La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 2n - 8$ est une suite définie par une relation fonctionnelle : $u(n) = f(n)$ où $f : x \mapsto 2x - 8$.

La suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et la relation $v(n+1) = 2 \times v(n) - 8$ pour tout entier naturel n est une suite définie par une relation de récurrence.

Considérons la suite (p_n) définie, pour tout entier naturel n , par $p(n)$ la $n^{\text{ème}}$ décimale de π . Ses premiers termes sont $p(0) = 3, p(1) = 1, p(2) = 4$, et $p(3) = 1$.

Remarque :

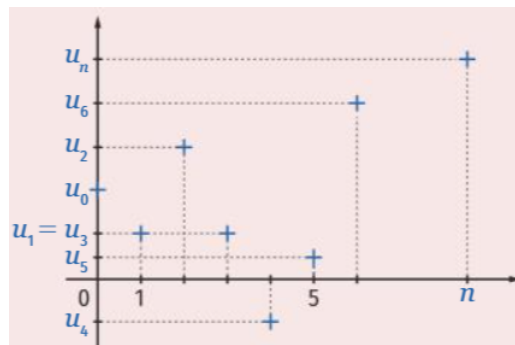
- Pour une suite définie par une relation fonctionnelle, $u(n)$ s'exprime directement en fonction de n , ce qui permet de calculer n'importe quel terme.
- Pour une suite définie par une relation de récurrence, il est nécessaire de connaître un terme de la suite pour calculer les autres termes de la suite.

Objectif : Calculer un terme de rang donné. Étudier des suites définies par différents modes de génération.
Exercices 14, 15 page 90. Exercices 22, 26 page 91. Exercices 42, 43, 44 page 92. Exercice 48 page 92.
Exercices 23, 24, 25, 28 page 91. Exercice 45, 54 page 92.

Activité calculatrice.

2 Représentation graphique.

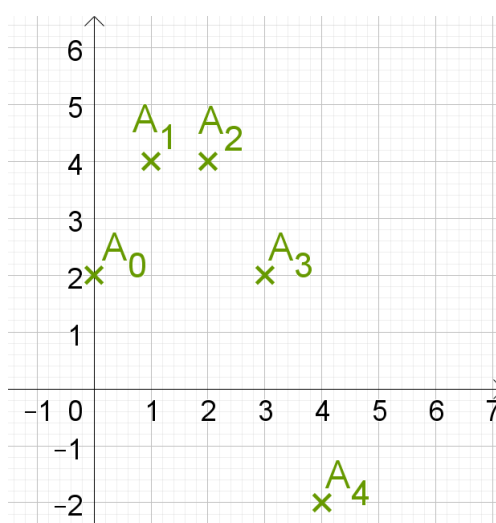
Définition : Soit (u_n) une suite. Dans un repère, la représentation graphique de la suite (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n; u(n))$.



Remarque : La représentation graphique d'une suite est un nuage de points et non une courbe.

Exemple : Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u(n) = -n^2 + 3n + 2$. On a : $u(0) = 2$, $u(1) = 4$, $u(2) = 4$, $u(3) = 2$ et $u(4) = -2$.

La représentation graphique des premiers termes de cette suite est donc constituée des points $A_0(0; 2)$, $A_1(1; 4)$, $A_2(2; 4)$, $A_3(3; 2)$ et $A_4(4; -2)$.



Objectif : Réaliser et exploiter la représentation graphique d'une suite.
Exercices 16 à 19 page 30.
Exercices 58 page 93.

3 Sens de variation d'une suite.

Définition : Soit (u_n) une suite numérique :

- La suite (u_n) est croissante (**resp.** strictement croissante) si pour tout entier naturel n , $u(n+1) \geq u(n)$ (**resp.** $u(n+1) > u(n)$), c'est-à-dire si ses termes sont de plus en plus grands.
- La suite (u_n) est décroissante (**resp.** strictement décroissante) si pour tout entier naturel n , $u(n+1) \leq u(n)$ (**resp.** $u(n+1) < u(n)$), c'est-à-dire si ses termes sont de plus en plus petits.
- La suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n , $u(n+1) = u(n)$.

Exemple : Soit (u_n) une suite définie par $u(0) = 1$ et $u(n+1) = u(n) - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour conjecturer son sens de variation, on peut calculer ses premiers termes :

$$u(0) = 1, u(1) = -3, u(2) = -7, u(3) = -11.$$

Maintenant que nous avons conjecturé le sens de variation de la suite (u_n) , démontrons qu'elle est strictement décroissante.

Comme $u(n+1) = u(n) - 4$, on en déduit que $u(n+1) - u(n) = -4 < 0$ donc $u(n+1) < u(n)$: la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Remarque :

- Pour déterminer le sens de variation de la suite (u_n) précédente, on pouvait aussi étudier le signe de $u(n+1) - u(n)$ pour tout entier naturel n .

- Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes, comme par exemple la suite définie par $u(n) = (-1)^n$ pour tout entier naturel n .

Objectif : Réaliser et exploiter la représentation graphique d'une suite.
Exercices 59 et 60 page 93.
Exercices 65 à 69 page 934.
Exercice 61 page 93.

Exos problèmes fiche
