

Chapitre 11 : Dérivation de fonctions.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Thème : Analyse.

Contenus :

- Fonction dérivée.
- Fonctions dérivées de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$
- Dérivée d'une somme, dérivée de kf ($k \in \mathbb{R}$), dérivée d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
- Sens de variation d'une fonction, lien avec le signe de la dérivée.
- Tableau de variations, extremums.

Capacités attendues :

- Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois.
- Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Commentaires : il est possible de démontrer que la dérivée d'une fonction monotone est de signe constant. La réciproque (admise) s'appuie sur l'interprétation géométrique du nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.

Activité 1 : conjecturer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^2$.

I Fonction dérivée.

I.1 Définition.

Définition : Si f est une fonction dérivable en tout point d'un intervalle I , on dit que f est dérivable sur I . La fonction qui, à chaque réel x de I , associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f' :

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

Exemple : On a vu dans l'activité d'introduction que la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.

I.2 Dérivée de fonctions polynomiales.

Propriétés :

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$ où k est une constante réelle, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x , $f'(x) = 0$.
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x , $f'(x) = 1$.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x , $f'(x) = 2x$.
4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2$.

I.3 Dérivée d'une somme de fonctions, du produit d'une fonction par un réel.

Propriété : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et k un réel.

1. La fonction f définie sur I par $f(x) = ku(x)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I ,
 $f'(x) = ku'(x)$.
2. La fonction f définie sur I par $f(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I ,
 $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemple : La dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2$ est la fonction g' définie sur $\mathbb{R}$ par $g'(x) = 3 \times 2x = 6x$.

La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 - 0 = 3x^2 - 2x + 1$.

Pour s'aider à dériver, on pourra utiliser le tableau distribué par l'enseignant, qui fonctionne comme ci-dessous :

Aide pour dériver une fonction										
$f(x)$	=	x^3	-	x^2	+	x	-	1		
$f'(x)$	=	$3x^2$	-	$2x$	+	1	-	0		

Objectif : Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois.

Communs : Exercices 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 page 149, 59 page 152, 75 page 153.

Pour les plus rapides : Exercices 27, 28 page 149, 55 à 57 page 152, 62 à 67 page 152, 76 page 153.

II Sens de variation d'une fonction.

Propriétés : Soit f une fonction définie sur un ensemble D et I un intervalle de D .

1. Si, pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
2. Si, pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

Définition : Soit f une fonction définie et dérivable sur I . Si f' s'annule et change de signe en une valeur a , on dit que f atteint un **extremum local** en a .

Remarque : Un extremum local peut être un minimum local ou un maximum local.

Exemple : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; 2]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

Pour étudier les variations de la fonction f , on étudie le signe de $f'(x)$. Pour tout réel x , $f'(x) = 2x - 2$.

$f'(x) \geq 0$ équivaut à $2x - 2 \geq 0$, et donc à $2x \geq 2$, soit $x \geq 1$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-1; 2]$, puis les variations de la fonction f .

x	-1	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	2	-2	-1

La fonction f admet un minimum en 1. Ce minimum est égal à -2.

Propriétés : Soit f une fonction définie sur un ensemble D et I un intervalle de D .

1. Si f est croissante sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$.
2. Si f est décroissante sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$.

Objectif : Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Communs : Exercices 30, 31, 32, 33, 34 page 149.

Pour les plus rapides : Exercices 77, 78, 79, 80 page 153, 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 89, 90 page 154.