

Chapitre 10 : Fonctions polynômes de degré 3.

Eliot ROY

2022-2023

Points du programme.

Thème : Analyse.

Contenus :

- Représentations graphiques des fonctions $x \mapsto ax^3$, $x \mapsto ax^3 + b$.
- Racines et signe d'un polynôme de degré 3 sous la forme $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
- Équation $x^3 = c$, racine cubique d'un nombre réel positif, notation $c^{\frac{1}{3}}$ et $\sqrt[3]{c}$.

Capacités attendues :

- Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 3.
- Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 3 pour trouver ses racines et étudier son signe.
- Résoudre des équations de la forme $x^3 = c$ avec c positif.

Commentaires :

- Les fonctions polynômes de degré 3 donnent l'occasion de pratiquer le calcul numérique (image d'un nombre donné) et littéral (développement, factorisation) et de travailler sur les représentations graphiques. Les connaissances sont mobilisées sur les translations.
- Les exemples prennent appui sur des situations réelles (impôts, hauteurs de marée, tarifs de courrier, évolution de l'émission de CO_2 ...) et internes aux mathématiques (problèmes d'optimisation dans un cadre géométrique).

Algorithmique : Calculer une valeur approchée d'une solution d'une équation par balayage.

I Fonctions du type $x \mapsto ax^3$ et $x \mapsto ax^3 + d$.

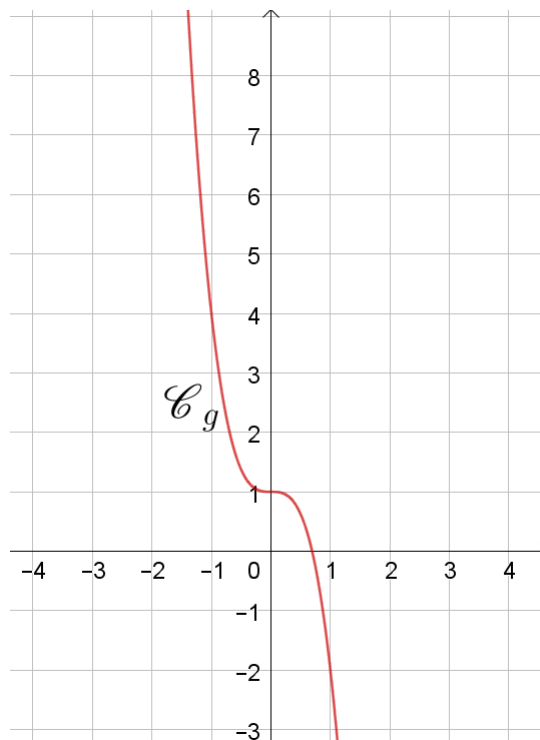
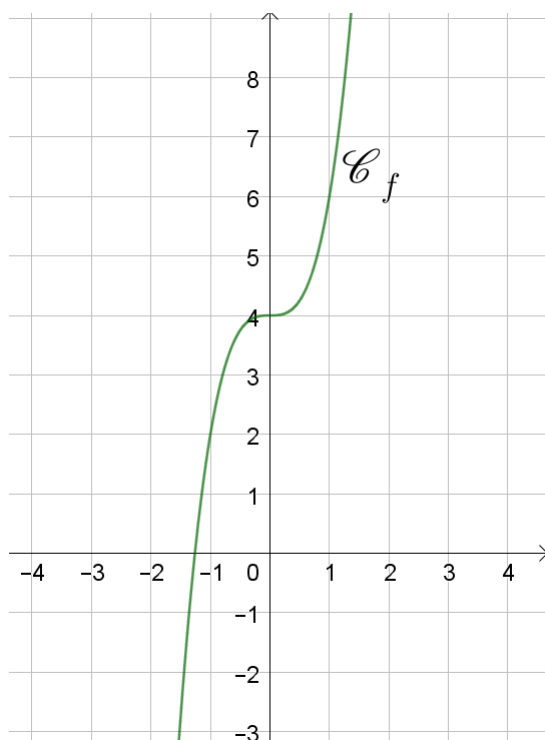
Définition : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction polynôme de degré 3 si il existe quatre réels a, b, c, d avec $a \neq 0$, tels que pour tout réel x , $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x^3 - 4x^2 + 8x - 6$ est une fonction polynôme de degré 3.

Propriété : Soit a un réel non nul et d un réel.

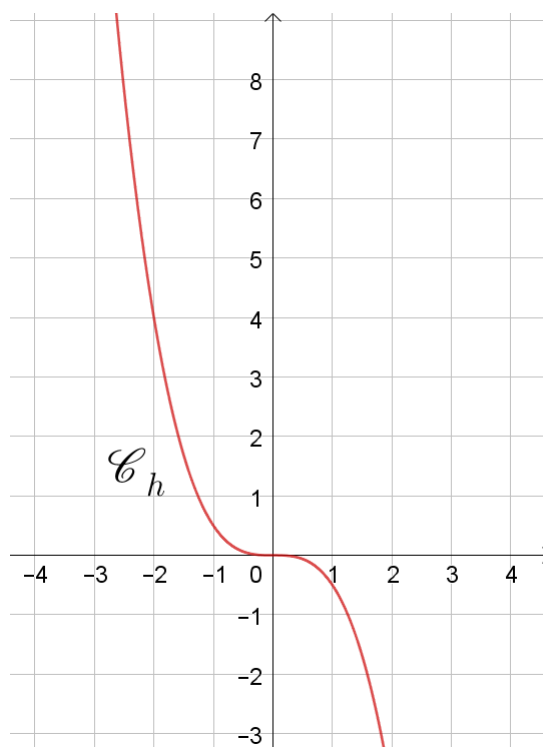
1. Si $a > 0$, alors la fonction $f : x \mapsto ax^3 + d$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si $a < 0$, alors la fonction $f : x \mapsto ax^3 + d$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple : Voici la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 4$ et de la fonction $g : x \mapsto -4x^3 + 1$.



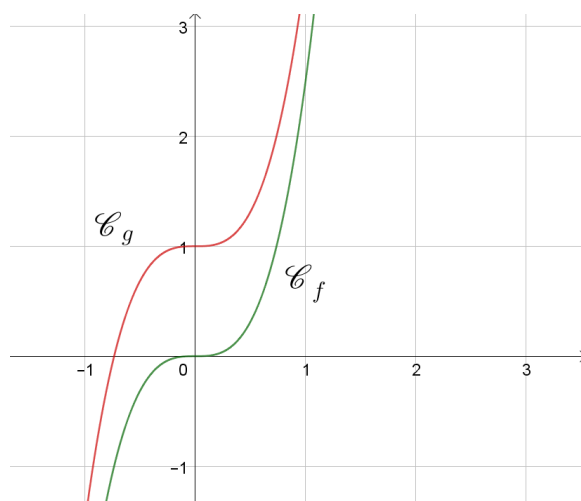
Propriété : Les courbes représentatives des fonctions de la forme $x \mapsto ax^3$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère.

Exemple : Voici la représentation graphique de la fonction $h : x \mapsto -0.5x^3$.



Remarque : Les représentations graphiques des fonctions de la forme $x \mapsto ax^3 + d$ sont similaires à celles des fonctions de la forme ax^3 . Elles ne sont pas symétriques par rapport à O, mais elles sont translatées verticalement, vers le haut ou vers le bas selon le signe de b .

Exemple : Voici la représentation graphique des fonctions $f : x \mapsto 2,5x^3$ et $g : x \mapsto 2,5x^3 + 1$:



Objectif : Associer une parabole à une expression algébrique de degré 3.

Communs : Exercices 32, 33 page 121.

II Résolution d'équations du type $x^3 = c$.

Propriété : Soit c un réel positif. L'équation $x^3 = c$ possède une unique solution : le nombre $\sqrt[3]{c}$, qu'on note aussi $c^{\frac{1}{3}}$.

Exemple : L'équation $x^3 = 11$ a une unique solution : $x = \sqrt[3]{11}$. La calculatrice en donne une valeur approchée : $\sqrt[3]{11} \approx 2,224$.

Objectif : Résoudre des équations de la forme $x^3 = c$.

Communs : Exercices 115, 116, 117 page 127.

III Fonctions de la forme $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Propriété : Soient a un réel non nul, et x_1, x_2, x_3 trois réels. La fonction f définie, pour tout réel x , par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ est une fonction polynôme de degré 3.

Exemple : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)(x + 1)$. Si on développe l'expression algébrique de la fonction f , on obtient les calculs suivants :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x - 1)(x + 3)(x + 1) \\ &= 2(x^2 + 3x - x - 3)(x + 1) \\ &= 2(x^2 + 2x - 3)(x + 1) \\ &= 2(x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x - 3x - 3) \\ &= 2(x^3 + 3x^2 - x - 3) \\ &= 2x^3 + 6x^2 - 2x - 6 \end{aligned}$$

On retrouve l'expression algébrique d'une fonction polynôme de degré 3 de la définition du I.

Remarque : L'expression $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ correspond à la forme factorisée de la fonction f .

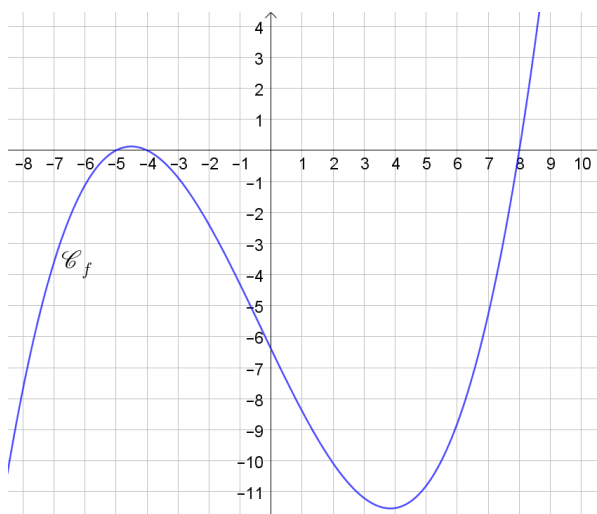
Objectif : Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'une fonction polynôme de degré 3.

Communs : Exercice 108.

Propriété : Soient a un réel non nul, et x_1, x_2, x_3 trois réels. La fonction f définie, pour tout réel x ,

par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ admet pour racines x_1 , x_2 et x_3 .

Exemple : On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{25}(x + 5)(x - 8)(x + 4)$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f s'annule en $x = -5$, $x = -4$ et $x = 8$.



Il est possible de déterminer le tableau de signe d'une fonction polynôme de degré 3 lorsqu'on connaît son expression factorisée.

Exemple : Reprenons la fonction f de l'exemple précédent, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{25}(x + 5)(x - 8)(x + 4)$. Pour chacune des fonction affines $x \mapsto x + 5$, $x \mapsto x - 8$ et $x \mapsto x + 4$, on peut déterminer le signe.

$$x + 5 \geq 0 \text{ pour } x \geq -5$$

$$x - 8 \geq 0 \text{ pour } x \geq 8$$

$$x + 4 \geq 0 \text{ pour } x \geq -4.$$

x	$-\infty$	-5	-4	8	$+\infty$
$\frac{1}{25}(x + 5)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 8$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 4$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Objectif : Dresser le tableau de variation pour les des fonctions polynôme de degré 3 du type $x \mapsto ax^3$ et $x \mapsto ax^3 + d$.

Communs : Exercices 102, 103 page 127.

Objectif : Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 2 pour trouver ses racines et étudier son signe.

Communs : Exercices 110, 111, 112, 113 et 114 page 127.

Objectif : Associer une parabole à une expression algébrique de degré 3 pour les fonctions du type $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Communs : Exercice 33 page 121, 104 page 127.